**Группа Т-22, предмет «Математика»**

**24 - 27. 11. 2020 г.**

**Сюткина Надежда Юрьевна**

**Ответы отправлять на электронную почту: sytkinan@mail.ru**

Задание: выполнить задание № 1.

**Практическая работа № 25**

**Тема: «возведение в степень матриц»**

**Цель:** совершенствование умений возведения в степень матриц.

Количество часов – 2

Возведение матрицы в степень имеет смысл лишь для квадратных матриц (подумайте, почему?). Тогда целой положительной степенью m матрицы A является произведение m матриц, равных A. Так же, как и у чисел. Под нулевой степенью квадратной матрицы A понимается единичная матрица того же порядка что и A. Если позабыли, что такое единичная матрица, гляньте на рис. 3.



Так же, как и у чисел, имеют место следующие соотношения:  
AmAk=Am+k  
(Am)k=Amk.

**Практическая работа № 26**

**Тема: «решение задач»**

**Цель:** совершенствование умений решения матричных уравнений.

Количество часов – 2

Начнём с простого линейного [**уравнения**](http://mathprofi.ru/uravnenija_v_vysshei_matematike.html), например уравнения C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_d6ed7bdfe3a33ca0.png . Оно состоит из математических знаков, чисел и неизвестной «икс». Перенесём «тройку» в правую часть и найдём решение уравнения:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_477421b8257a19d6.png

Выполним проверку, для этого подставим найденное значение C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_a8332c3c21eb0434.png  в исходное уравнение:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_5cc623013061a482.png

Получено верное равенство, значит, решение найдено правильно.

Про матричные уравнения рассказывать? =) Они устроены практически так же, только вместо чисел… правильно – матрицы (и конечно, числа тоже есть, помним, что матрицу можно умножить на число). Плюс особенные фишки, характерные для действий с матрицами. Всё просто, и особых трудностей возникнуть не должно.

**Общие принципы решения матричных уравнений**

Типовое матричное уравнение состоит, как правило, из нескольких матриц и неизвестной матрицы C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_b5f20d22da99d0e4.png , которую предстоит найти. То есть, **решением матричного уравнения является матрица**.

Пример 1

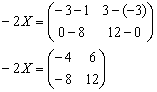
Решить матричное уравнение, выполнить проверку  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_770ec5d912794b3a.png

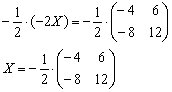
**Как решить матричное уравнение?**

Фактически нужно использовать алгоритм решения детского уравнения с числами.

В правой части умножаем каждый элемент матрицы на три, а матрицу левой части переносим

направо со сменой знака:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_790db57d6cfb8f8c.png

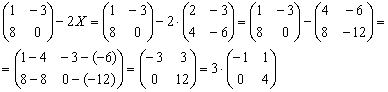
Причёсываем правую часть:  


Выразим C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_69afe5f44b20f47d.png , для этого обе части уравнения умножим на C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_915a117c3e9ec012.png :  


Все числа матрицы делятся на 2, поэтому уместно избавиться от дроби. А заодно и от «минуса». Делим каждый элемент матрицы на –2:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_c1da3ce31a989075.png

**Ответ**: C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_416cb37ab90e08c6.png

**Как выполнить проверку?**

Подставим найденное значение C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_53b51fac63f9367b.png  в левую часть исходного уравнения и проведём упрощения:  


Последним действием вынесли «тройку» из матрицы.

Получена правая часть исходного уравнения, значит решение найдено правильно.

Кстати, всегда ли матричное уравнение вообще имеет решение? Конечно не всегда. С ходу привожу простейшее доказательство: C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_92a940a932eae292.png .

Пример, который мы разобрали, элементарен, и, скажу честно, вероятность столкнуться с чем-то подобным на практике невелика. Поэтому перейдём к более содержательным заданиям, которые с вероятностью, стремящейся к 100%, встретятся вам в реальной контрольной работе. Но прежде систематизируем общий ход решения:

**Распространённый алгоритм решения матричного уравнения**

Итак, на голову упал стандартный персонаж, состоящий из нескольких матриц, некоторых множителей и птицы счастья C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_b02c5cae129f520.png .

**На первом шаге** уравнение приводится к одному из двух видов:

C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_fb157e0320e0290b.png либо C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_30616da2ed8ccfa1.png , где C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_dfd3b3181e5bf556.png  – известные матрицы.

***Примечание****: существует также третий вид:*C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_351a8d024d29efb4.png *, но в действительности он встречается крайне редко. Тем не менее, в конце статьи я рассмотрю данный случай.*

Как привести уравнение к виду C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_a751791e44c48945.png  или C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_30616da2ed8ccfa1.png ?  Все действия вы видели в Примере №1 – это перенос матриц из части в часть, «упаковывание» множителей в матрицы, матричное сложение/вычитание.

**На втором шаге** необходимо выразить C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_ca3ad43a0742487f.png  или, выражаясь более академично, *разрешить уравнение относительно*C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_18704c5ebfdc9789.png.

1) C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_cde1f766655c0133.png . Для того, чтобы разрешить данное уравнение относительно C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_40fd7600557fd2b7.png , умножим обе его части на C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_15cf2c628f821d3f.png  **слева**(*здесь и далее предполагаем, что обратная матрица существует*):  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_5f3274fbfc252513.png

***!!! Внимание!****Произведение матриц не перестановочно, поэтому****критически важно****, с какой стороны проводить умножение.*

По [**свойству матричных операций**](http://mathprofi.ru/svoistva_operacij_nad_matricami_matrichnye_vyrazheniya.html):C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_f9652e17b56f5030.png , поэтому:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_84eb2d3b4b60258a.png

Единичную матрицу можно убрать :  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_15099dd1d0301e56.png

Чего и требовалось достичь. Матрица C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_44d0a8ec4f752a24.png  нам не известна.

2) C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_30616da2ed8ccfa1.png . Умножаем обе части уравнения на C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_44d0a8ec4f752a24.png  **справа**:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_79d25076d568c98f.png

Согласно [**свойству матричных операций**](http://mathprofi.ru/svoistva_operacij_nad_matricami_matrichnye_vyrazheniya.html)C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_b3d99e98fe013675.png , получаем:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_5202f69ddde8a6ff.png

Единичную матрицу убираем:  
C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_b5ece269e9c4c9e8.png

Готово. Матрица C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_44d0a8ec4f752a24.png  нам опять же не известна.

Таким образом, на втором шаге решение выражается в виде C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_c744b6aabdc63f10.png  либо в виде C:\Users\User\AppData\Local\Temp\lu63323h96z9.tmp\lu63323h97h3_tmp_efa971b20e87e979.png .

**Практическая работа № 27**

**Тема: «обратная матрица»**

**Цель:** усвоение понятия обратная матрица.

Количество часов – 2

Это понятие относится к квадратным матрицам. Матрица называется обратной к матрице , если при умножении этих матриц получается единичная матрица того же порядка. *Известно, что при умножении матрицы A на B может получиться другая матрица, чем при умножении B на A.* Однако математики, в частности профессор Белоусов, доказали, что при умножении обратных матриц в результате получается одна и та же матрица, независимо от порядка их умножения. Матрица, обратная к матрица A, обозначается так : A-1 . Введём ещё понятие: вырожденная матрица. Оно означает, что определитель матрицы равен нулю. *Матрица - выродок. А определил это её папа - полный нуль.*А если не равен, то матрица является невырожденной. Математики доказали, что обратная матрица существует тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная. *Как известно, определитель произведения матриц равен произведению их определителей. Из этого следует, что если хотя бы одна умножаемая матрица вырожденная, то и матрица - произведение вырожденная. Мы, однако, знаем, что определитель единичной матрицы равен единице (раздел), стало быть. она невырожденная.*

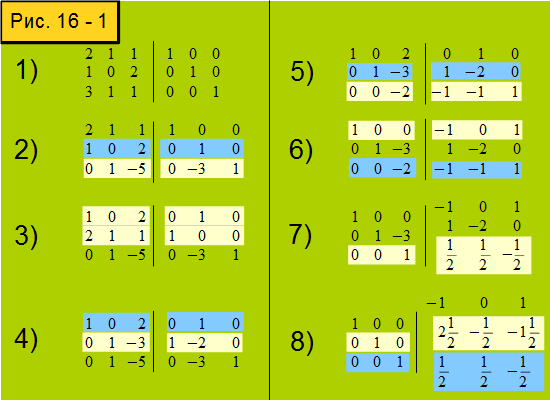
Чтобы найти обратную матрицу, можно проделать следущее:  
1) Найти определитель исходной матрицы. Если он равен нулю, матрица вырожденная, и обратной к ней матрицы не существует.  
2)Транспонировать исходную матрицу.  
3)Заменить в получившейся матрице все элементы их алгебраическими дополнениями.  
4)Умножить получившуюся матрицу на число 1/A , где A - определитель исходной матрицы.  
Однако есть более простые способы.

**Метод нахождения обратной матрицы при помощи элементарных преобразований строк.**

На рис. 16-1, позиция 1) изображена так называемая расширенная матрица. Она состоит из двух подматриц. Слева - исходная, к ней мы будем находить обратную матрицу. Справа - единичная матрица. С ней мы будем проделывать ровно те же операции, что и с исходной матрицей, и в результате исходная матрица превратится в единичную, а единичная - в обратную к исходной.

Операции будем проводить следущие:  
**1) Умножение любой строки на число X, не равное нулю.  
2) Прибавление любой строки, умноженной на число X, к другой строке. При этом остальные строки не меняются.  
3) Перестановка двух строк между собой. При этом остальные строки не меняются**

Почему именно эти операции, и почему в результате получится обратная матрица?



Будем добиваться. чтобы в нули превратились все **недиагональные** элементы сначала в первом столбике, затем во втором, и так далее **(впрочем, это не принципиально)**.  
2) Умножили вторую строку на (-3) и прибавили к третьей строке.  
3) Поменяли местами первую и вторую строки.  
4)Умножили первую строку на (-2) и прибавили ко второй строке.  
5) Умножили вторую строку на (-1) и прибавили к третьей строке.  
6) Прибавили третью строку к первой строке.  
7) Умножили третью строку на -1/2 .  
8) Умножили третью строку на 3 и прибавили ко второй. Слева получаем единичную матрицу, справа - обратную к исходной

задание № 1:

решить матричное уравнение вида: AX=B и выполнить проверку:

X=