Дата: 21.12.2020

Группа: м-22

Предмет: Математика

Тема: «Понятие интеграла»

**Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

Запиши число, тему, прочитай теорию, перечерти графики, запиши формулу Ньютона-Лейбница, **основные свойства определённого интеграла.**

Первообразная

К понятию первообразной функции приводят многие задачи математического анализа и физики. Рассмотрим былинный физический пример: известен закон изменения скорости тела , требуется найти закон изменения координаты  данного тела.

Скорость – это производная от пройдённого пути:  (см. урок о [**смысле производной**](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html)), таким образом, для решения задачи необходимо по заданной функции  (производной) восстановить функцию .

Общая же постановка вопроса такова: в распоряжении есть некоторая функция  и возникает потребность выяснить, от какой функции она произошла. То есть, необходимо найти ТАКУЮ функцию , чтобы .

**Определение**: функция  называется **первообразной** для функции  на некотором промежутке, если для всех  из этого промежутка выполняется равенство  или, что то же:  (раскрывать дифференциал мы научились ещё на первом уроке о [*неопределённом интеграле*](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html)).

Например, для  первообразной функцией на всей числовой прямой будет являться функция . И действительно, для любого «икс»:
.

Простое, но требующее доказательства утверждение:

**Теорема**: пусть  – какая-нибудь первообразная для функции  на некотором промежутке. Тогда функция , где  – произвольная константа, тоже будет первообразной функцией для  на данном промежутке.

**Доказательство**: поскольку [производная константы](http://www.mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf) равна нулю, то:
, следовательно,  – первообразная для функции  по определению первообразной, что и требовалось доказать.

Так, для функции  первообразной будет являться любая функция из множества , где  (мысленно поподставляйте конкретные числовые значения).

Докажем обратное утверждение: любая другая первообразная  для функции  отличается от  лишь на приплюсованную константу, иными словами: .

Вот это уже менее очевидный факт. И в самом деле – вдруг для функции  существует не только , а какая-нибудь ещё первообразная?

Пусть  – это две первообразные для функции  на некотором промежутке. Тогда для любого «икс» из данного промежутка [производная разности](http://www.mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf) будет равна:

, или если записать короче:



Но с другой стороны, из [дифференциального исчисления](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html) известно, что данному условию удовлетворяет функция-константа и только она:


Откуда и следует равенство , которое требовалось доказать. Таким образом, любая первообразная для функции  имеет вид 

Вуаля:

**Определение**: множество всех первообразных  для функции  называется неопределённым интегралом от функции  и обозначается символом . Таким образом, по определению:

, где 

Напоминаю, что функция  называется подынтегральной функцией,  – подынтегральным выражением, а сам процесс отыскания множества первообразных   – **интегрированием**. Интегрирование – это восстановление функции  по её производной  (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Для нашего демонстрационного примера:
, где 

Проверка:  – исходная подынтегральная функция.

Любая ли функция интегрируема? Нет.

Сформулируем **достаточное условие интегрируемости**: если на некотором промежутке функция [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html), то она интегрируема на нём.

Как видите, условие довольно-таки лояльное – для существования первообразной достаточно лишь [непрерывности](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html). Ниже по тексту, если не сказано иного, все функции будем считать интегрируемыми.

### ****Свойства неопределённого интеграла****

Нумеровать крайне не люблю, но здесь лучшего варианта не видно:

**1) Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению**:


**Доказательство**: по определению неопределённого интеграла: , следовательно:
, что и требовалось доказать.

Второе. По правилу раскрытия дифференциала (а точнее, по [определению дифференциала](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html)) и только что доказанному пункту:


Потёрто.

**2) Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной**:


Учитывая, что , свойство можно переписать в следующем виде:


Тут даже доказывать ничего не надо, поскольку  и получается непосредственно само определение неопределённого интеграла.

Как видите, в обоих случаях значки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, что естественно.

Следующие свойства вам хорошо знакомы – это мировые свойства линейности, которые справедливы и для других типов интегралов: [определённых](http://www.mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html), [двойных](http://www.mathprofi.ru/dvoinye_integraly_dlya_chainikov.html), [тройных](http://www.mathprofi.ru/troinye_integraly.html), [криволинейных](http://www.mathprofi.ru/krivolineinye_integraly.html) и пр.

**3) Константу можно вынести из-под знака интеграла**

То есть, если , то 

**Доказательство**: а вы как думали? =)

Найдём производную левой части. Используем свойство №1:


Найдём производную правой части. Используем [правило дифференцирования](http://www.mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf)  и свойство №1:


Получены одинаковые результаты, из чего и следует справедливость данного свойства.

Вообще, многие доказательства не столько сложны, сколько занудны и формальны – используются определения, ранее доказанные свойства, теоремы и т.д. Но, несмотря на их сухость, немалая часть студентов входит во вкус и даже начинает читать учебники по высшей математике в любой свободный момент  =) Будьте осторожны =)

**4) Неопределённый интеграл от алгебраической суммы  функций равен алгебраической сумме интегралов**:



Справедливо для любого количества слагаемых.

Свойство проверяется точно так же, как и предыдущее – берутся производные от обеих частей. Но доказывать его я, пожалуй, не буду – хорошего понемножку =)

Перейдём к ещё более интересному разделу:

## ****Определённый интеграл и его свойства****

Настал момент, который все ждали, затаив дыхание. Что такое определённый интеграл  и почему он есть площадь? Да и откуда взялся сам значок интеграла? Вот мы много раз слышали: «интеграл, интеграл, интеграл, …». Но понятие же не из космоса прилетело! Читаем:

Пусть функция  определена на промежутке . Для определённости и простоты считаем, что функция положительна  и [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на данном отрезке. **Поставим задачу найти площадь** **криволинейной трапеции**, ограниченной графиком функции , прямыми  и осью . Обращаю внимание на тот факт, что непрерывность функции на отрезке заведомо гарантирует существование конечной площади .

Разобьём отрезок  на  частей следующими точками:
 (красные точки):


В результате получено  частичных промежутков  с длинами  соответственно. В общем случае длины  различны – какие-то отрезки короче, какие-то длиннее. Максимальную длину называют **диаметром разбиения** и обозначают буквой «лямбда»: .

**Примечание**: последняя запись читается, как «максимальное значение из множества (набора) **»

**Примечание**: последняя запись читается, как «максимальное значение из множества (набора) **»

В каждом из полученных промежутков опять же произвольно выбираем точки  (синие квадратики).

**Примечание**: ** («кси») – 14-я буква греческого алфавита

Рассмотрим  промежуток . Его длина, очевидно, равна  (зелёная обоюдоострая линия). Значению аргумента  соответствует значение  функции  (синие пунктирные линии), и произведение  в точности равно **площади** соответствующего коричневого прямоугольника.

Аналогично устроен каждый отрезок. Составим сумму, которая равна площади коричневой ступенчатой фигуры:


Данная сумма называется **интегральной суммой**, и её часто записывают в свёрнутом виде:


**Примечание**: **– это значок суммы, а переменная ** – своеобразный «счётчик», т.е. сначала **, затем **, потом **, … и, наконец, **

Что означает прилагательное «интегральной»? В широком смысле слова, **интегрировать – это значит, что-то объединять**. В данном случае интегральная сумма  **объединяет** площади коричневых прямоугольников и с некоторой точностью приближает площадь криволинейной трапеции: 

Теперь зададимся вопросом: **как улучшить точность приближения**? Действия очевидны  – увеличиваем и увеличиваем значение . При этом количество отрезков  **растёт**, а их длины  – **уменьшаются**, в том числе неизбежно уменьшается и максимальная длина . Количество точек  тоже возрастает и ступенчатая фигура всё больше и больше напоминает криволинейную трапецию.

И, если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности , то интегральная сумма (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции: .

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:


Наблюдаем за удивительным превращением:

1) В рассматриваемом контексте сумму ещё с 17 века обозначали растянутой буквой S (Summa). Это обозначение известно как значок интеграла:



2) Если  (и, следовательно, ), то значения  стремятся «покрыть» **все** значения функции  из промежутка ,  то есть:

, при этом пределы интегрирования: 

3) И, наконец, длина любого промежуточного отрезка  становится [бесконечно малой](http://www.mathprofi.ru/beskonechno_malye_funkcii_zamechatelnye_ekvivalentnosti.html). Обозначение этой бесконечно малой длины мы тоже хорошо знаем, оно указывает, что объединение ведётся по переменной «икс»:



**В результате, площадь криволинейной трапеции**: 

**Определение**: конечный предел интегральной суммы  при , **не зависящий** ни от способа дробления отрезка , ни от выбора точек , называется **определённым интегралом** функции  по промежутку  и обозначается символом .

При этом функция  называется **интегрируемой** в промежутке . Для интегрируемости (а, значит, существования конечной площади), напоминаю, достаточно [непрерывности](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) функции на отрезке . Если же на данном промежутке есть участки, где функция, например, [не определена](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html) (нет её графика), то конечного предела  и, соответственно, определённого интеграла  не существует.

В каждом из полученных промежутков опять же произвольно выбираем точки  (синие квадратики).

**Примечание**: ** («кси») – 14-я буква греческого алфавита

**По аналогичному принципу** (дробление отрезка, выбор промежуточных точек, нахождение интегральной суммы, предел и предельный переход) **выводятся другие тематические формулы**: [объема тела вращения](http://www.mathprofi.ru/obyem_tela_vrashenija.html), [длины дуги кривой](http://www.mathprofi.ru/dlina_dugi_krivoi.html), [площади поверхности вращения](http://www.mathprofi.ru/ploshad_poverhnosti_vrashenija.html) и т. д. Надеюсь, теперь вам будет значительно легче разобраться в соответствующем теоретическом материале.

Если что-то осталось недопонятым, текст следует не спеша перечитать заново либо вернуться к нему позже. Наиболее вероятные затруднения здесь связаны с альфой и омегой математического анализа – предельным переходом; в этом случае советую основательно проштудировать статьи о [пределах](http://www.mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html) и [теории производной функции](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html).

Всё было бы хорошо, но формулу  очень трудно применить на практике (даже для простых функций), поэтому возникает задача отыскания более эффективного пути расчёта площади. И такой путь действительно существует – ведь из определения определённого интеграла следует, что он не зависит от способа разбиения промежутка  и от выбора точек . **Важен лишь только** нижний предел интегрирования «а», верхний предел интегрирования «бэ» и сама функция «эф от икс».

### ****Вывод формулы Ньютона-Лейбница****

Рассмотрим тот же график  и познакомимся с функцией переменной площади . Что это за функция? Зафиксируем произвольную точку  (левая красная точка), лежащую между точками «а» и «бэ»:


В данной точке функция  равна площади криволинейной трапеции, которая расположена между зелёной и синей линиями и заштрихована синим цветом. Мысленно начните уменьшать значение «икс» и сдвигать синюю прямую влево – площадь начнёт уменьшаться и, в конце концов, в точке  станет равной нулю: (прямые совпадут). Теперь возвращаемся на исходную

В данной точке функция  равна площади криволинейной трапеции, которая расположена между зелёной и синей линиями и заштрихована синим цветом. Мысленно начните уменьшать значение «икс» и сдвигать синюю прямую влево – площадь начнёт уменьшаться и, в конце концов, в точке  станет равной нулю: (прямые совпадут). Теперь возвращаемся на исходную позицию и сдвигаем синюю линию вправо – в этом случае площадь  начнёт расти. И когда мы достигнем верхнего предела  (синяя прямая «закроет» красную), площадь будет равна в точности площади всей криволинейной трапеции: .

Таким образом, аргумент может изменяться в пределах , при этом функция (площадь) будет возрастать от  до .

**Докажем, что функция переменной площади  является первообразной функцией для функции ,  то есть докажем, что **.

Вернёмся к нашей точке «икс» и зададим в ней приращение  (зелёная стрелка). Для определённости полагаем, что  (случай  доказывается аналогично). Приращение аргумента  влечёт приращение функции  – геометрически это площадь криволинейной трапеции, которая заштрихована голубым цветом.

По так называемой теореме о среднем, на отрезке  **существует** точка «цэ» – **такая**, что площадь коричневого прямоугольника равна площади голубой трапеции:


**Примечание**: этот участок чертежа схематичен, поскольку мне трудно подобрать идеально точное местоположение точки «цэ»

По [определению производной](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html), производная функции – это отношение приращения функции  к приращению аргумента  при :
.

И, ввиду равенства :



(\*) Так как , то точка «цэ» бесконечно близко приближается к точке «икс», и, соответственно: 

Таким образом, **для любого**  из рассматриваемого промежутка справедливо равенство , означающее, что функция  является первообразной для функции .

По теореме, доказанной в самом начале урока, множество всех первообразных представимо в виде , где  – какая-нибудь другая первообразная для функции .

Теперь в данное равенство подставляем  и соответствующее значение площади :

, откуда следует, что 

Найденное значение константы  подставляем в :



Выруливаем на финишную прямую. При  функция  принимает значение, равное площади всей криволинейной трапеции: . Подставим  и  в уравнение :



Следует отметить, что в учебниках по высшей математике вывод этой формулы проводится в более солидном ключе – с помощью интеграла с переменным верхним пределом. Я же ограничился упрощенной версией доказательства, чтобы материал был понятен бОльшему количеству читателей.

Это ещё, кстати, не всё =) Завершаем мысль:

В предыдущем параграфе мы доказали, что площадь криволинейной трапеции – есть предел интегральной суммы: .

Но с другой стороны, .

И из этих двух фактов следует лаконичная **формула Ньютона-Лейбница**:

Но с другой стороны, .

И из этих двух фактов следует лаконичная **формула Ньютона-Лейбница**:
, где  – первообразная функция для функции .

Множество практических примеров на применение формулы можно найти в статьях [Определённый интеграл. Примеры решений](http://www.mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html) и [Вычисление площади с помощью определённого интеграла](http://www.mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html), а также в последующих статьях раздела.

### ****Рассмотрим основные свойства определённого интеграла****

– Свойство, которое уже фигурировало в предыдущем пункте: интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: . Графическая интерпретация очевидна: криволинейная трапеция вырождается в отрезок, а площадь отрезка с геометрической точки зрения равна нулю.

– Свойства линейности:

Уважительно промолчим.

– Если у интеграла поменять местами пределы интегрирования, то он сменит знак:


Почему? Пусть для определённости . Тогда при перестановке пределов интегрирования разбиение отрезка  будет проводиться справа налево (вспоминаем ступенчатую фигуру 1-го чертёжа), и длины частичных промежутков формально станут отрицательными , поэтому интегральная сумма  и сам интеграл (как предел суммы) сменит знак.

Следует заметить, что на практике намного чаще пользуются вторым случаем – когда изначально , например:

Цель этих действий – расставить пределы интегрирования в привычном порядке, хотя исходный интеграл  и так рассчитывается без всяких проблем. Однако не редкость, когда перестановка пределов интегрирования не только удобна, но и рациональна.

– Какими бы ни были точки :


Здесь в первую очередь, конечно же, напрашивается ситуация, когда точка «цэ» лежит внутри отрезка . Просто и естественно – криволинейную трапецию можно разделить на две части, т.е. изначальная площадь будет равна сумме площадей.

Но данное свойство работает и в «нестандартном» случае, когда точка «цэ» лежит вне промежутка . Желающие могут проанализировать это самостоятельно.

– **Пожалуйста, запомните!** Если подынтегральная функция , то  (здесь и далее полагаем, что **). И, наоборот, если , то интеграл будет неположительным: .

Свойство элементарно доказывается: снова вспоминаем, что . Длины частичных промежутков положительны: , но в первом случае значения функции  (криволинейная трапеция лежит не ниже оси абсцисс), а во втором случае  (криволинейная трапеция лежит не выше оси абсцисс)

Таким образом, если при вычислении интеграла  у вас получилось отрицательное значение – ищите ошибку. Функция  на промежутке интегрирования  (и, к слову, вообще на любом ненулевом промежутке), поэтому интеграл  обязательно должен получиться положительным.

Наоборот – если интеграл  получился положительным, то здесь тоже где-то допущена ошибка, поскольку  на отрезке .

**! Совет**: перед решением любого определённого интеграла всегда полезно проанализировать знак подынтегральной функции!

– **Ещё одно важное свойство**. Если функции  интегрируемы на , и для всех «икс» из данного промежутка справедливо неравенство , то


Тоже всё наглядно – график функции  расположен не ниже графика функции , поэтому площадь  будет не меньше, а на практике почти всегда – **больше** площади .

Из данного свойства следует **важнейшая рабочая формула** вычисления площади фигуры, ограниченной графиками функций  и прямыми :


– Если  на , то 

Рассмотрим конкретную задачу, поясняющую геометрический смысл данного свойства, а то я чувствую, вы уже изнываете без практики =)

Пример 1

Оценить определенный интеграл 

**Решение**: подынтегральная функция  [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на отрезке , а значит, достигает на нём  и  – [наименьшего и наибольшего значений](http://www.mathprofi.ru/naibolshee_i_naimenshee_znacheniya_funkcii_na_otrezke.html). Решаем стандартную двухшаговую задачу по нахождению ****:

1) Вычислим значения функции в [критических точках](http://www.mathprofi.ru/vozrastanie_ubyvanie_ekstremumy_funkcii.html), принадлежащих отрезку:

 – критическая точка.


2) Вычислим значения функции на концах отрезка:


Таким образом: ****

Длина отрезка интегрирования: 

В результате, оценка определённого интеграла:


**Ответ**: 

Геометрически это означает, что площадь  криволинейной трапеции (синяя штриховка) **не меньше** площади красного прямоугольника  и **не больше** площади зелёного прямоугольника :

Да, оценка, конечно, очень грубая, но таково задание и оно иногда встречается в контрольных работах. Кстати, интеграл  является неберущимся, и вычислить заштрихованную площадь можно лишь с определённой точностью, например, [методом трапеций](http://www.mathprofi.ru/formula_simpsona_metod_trapecij.html), [по формуле Симпсона](http://www.mathprofi.ru/formula_simpsona_metod_trapecij.html), [с помощью разложения функции в ряд](http://www.mathprofi.ru/vychislenie_integrala_razlozheniem_v_ryad.html), др. способами.

– И в заключение параграфа – **теорема о среднем**: если функция  непрерывна на , то существует точка  – такая, что . Геометрический смысл  теоремы я уже использовал при выводе формулы Ньютона-Лейбница, единственное, там речь шла о кусочке криволинейной трапеции, здесь же – о всей фигуре. Грубо говоря, всегда существует прямоугольник со стороной  (длина отрезка интегрирования), площадь которого равна площади .

Доказательство опустим, поскольку в нём фигурируют другие теоремы математического анализа.