Дата: 21.12.2020

Группа: м-22

Предмет: Математика

Тема: «Понятие интеграла»

**Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

Запиши число, тему, прочитай теорию, перечерти графики, запиши формулу Ньютона-Лейбница, **основные свойства определённого интеграла.**

Первообразная

К понятию первообразной функции приводят многие задачи математического анализа и физики. Рассмотрим былинный физический пример: известен закон изменения скорости тела http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image002.gif, требуется найти закон изменения координаты http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image004.gif данного тела.

Скорость – это производная от пройдённого пути: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image006.gif (см. урок о [**смысле производной**](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html)), таким образом, для решения задачи необходимо по заданной функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image002_0000.gif (производной) восстановить функцию http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image004_0000.gif.

Общая же постановка вопроса такова: в распоряжении есть некоторая функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008.gif и возникает потребность выяснить, от какой функции она произошла. То есть, необходимо найти ТАКУЮ функцию http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010.gif, чтобы http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image012.gif.

**Определение**: функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0000.gif называется **первообразной** для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0000.gif на некотором промежутке, если для всех http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image014.gif из этого промежутка выполняется равенство http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image012_0000.gif или, что то же: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image016.gif (раскрывать дифференциал мы научились ещё на первом уроке о [*неопределённом интеграле*](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html)).

Например, для http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image018.gif первообразной функцией на всей числовой прямой будет являться функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image020.gif. И действительно, для любого «икс»:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image022.gif.

Простое, но требующее доказательства утверждение:

**Теорема**: пусть http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0001.gif – какая-нибудь первообразная для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0001.gif на некотором промежутке. Тогда функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image024.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image026.gif – произвольная константа, тоже будет первообразной функцией для http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0002.gif на данном промежутке.

**Доказательство**: поскольку [производная константы](http://www.mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf) равна нулю, то:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image028.gif, следовательно, http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image024_0000.gif – первообразная для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0003.gif по определению первообразной, что и требовалось доказать.

Так, для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image018_0000.gif первообразной будет являться любая функция из множества http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image033.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image035.gif (мысленно поподставляйте конкретные числовые значения).

Докажем обратное утверждение: любая другая первообразная http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image037.gif для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0004.gif отличается от http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0002.gif лишь на приплюсованную константу, иными словами: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image041.gif.

Вот это уже менее очевидный факт. И в самом деле – вдруг для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image018_0001.gif существует не только http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image033_0000.gif, а какая-нибудь ещё первообразная?

Пусть http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image044.gif – это две первообразные для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0005.gif на некотором промежутке. Тогда для любого «икс» из данного промежутка [производная разности](http://www.mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf) будет равна:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image046.gif, или если записать короче:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image048.gif

Но с другой стороны, из [дифференциального исчисления](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html) известно, что данному условию удовлетворяет функция-константа и только она:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image050.gif

Откуда и следует равенство http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image041_0000.gif, которое требовалось доказать. Таким образом, любая первообразная для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0006.gif имеет вид http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image054.gif

Вуаля:

**Определение**: множество всех первообразных http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image024_0001.gif для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0007.gif называется неопределённым интегралом от функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0008.gif и обозначается символом http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image057.gif. Таким образом, по определению:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image059.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image035_0000.gif

Напоминаю, что функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0009.gif называется подынтегральной функцией, http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image061.gif – подынтегральным выражением, а сам процесс отыскания множества первообразных http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image063.gif  – **интегрированием**. Интегрирование – это восстановление функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image063_0000.gif по её производной http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0010.gif (обратное действие по отношению к дифференцированию).

Для нашего демонстрационного примера:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image065.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image035_0001.gif

Проверка: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image067.gif – исходная подынтегральная функция.

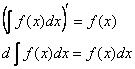
Любая ли функция интегрируема? Нет.

Сформулируем **достаточное условие интегрируемости**: если на некотором промежутке функция [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html), то она интегрируема на нём.

Как видите, условие довольно-таки лояльное – для существования первообразной достаточно лишь [непрерывности](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html). Ниже по тексту, если не сказано иного, все функции будем считать интегрируемыми.

### ****Свойства неопределённого интеграла****

Нумеровать крайне не люблю, но здесь лучшего варианта не видно:

**1) Производная от неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению**:  


**Доказательство**: по определению неопределённого интеграла: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image071.gif, следовательно:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image073.gif, что и требовалось доказать.

Второе. По правилу раскрытия дифференциала (а точнее, по [определению дифференциала](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html)) и только что доказанному пункту:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image075.gif

Потёрто.

**2) Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной**:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image077.gif

Учитывая, что http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image079.gif, свойство можно переписать в следующем виде:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image081.gif

Тут даже доказывать ничего не надо, поскольку http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image012_0001.gif и получается непосредственно само определение неопределённого интеграла.

Как видите, в обоих случаях значки дифференциала и интеграла взаимно уничтожаются, что естественно.

Следующие свойства вам хорошо знакомы – это мировые свойства линейности, которые справедливы и для других типов интегралов: [определённых](http://www.mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html), [двойных](http://www.mathprofi.ru/dvoinye_integraly_dlya_chainikov.html), [тройных](http://www.mathprofi.ru/troinye_integraly.html), [криволинейных](http://www.mathprofi.ru/krivolineinye_integraly.html) и пр.

**3) Константу можно вынести из-под знака интеграла**

То есть, если http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image084.gif, то http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image086.gif

**Доказательство**: а вы как думали? =)

Найдём производную левой части. Используем свойство №1:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image088.gif

Найдём производную правой части. Используем [правило дифференцирования](http://www.mathprofi.ru/tablica_proizvodnyh.pdf) http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image090.gif и свойство №1:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image092.gif

Получены одинаковые результаты, из чего и следует справедливость данного свойства.

Вообще, многие доказательства не столько сложны, сколько занудны и формальны – используются определения, ранее доказанные свойства, теоремы и т.д. Но, несмотря на их сухость, немалая часть студентов входит во вкус и даже начинает читать учебники по высшей математике в любой свободный момент  =) Будьте осторожны =)

**4) Неопределённый интеграл от алгебраической суммы  функций равен алгебраической сумме интегралов**:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image094.gif

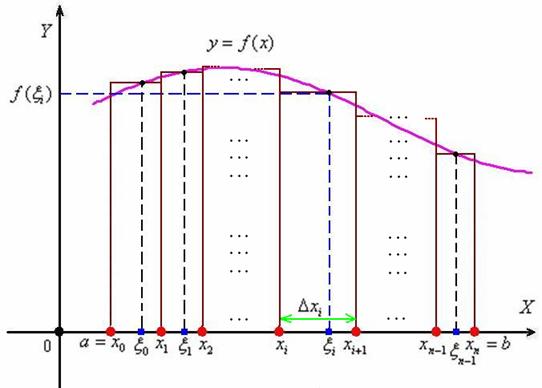
Справедливо для любого количества слагаемых.

Свойство проверяется точно так же, как и предыдущее – берутся производные от обеих частей. Но доказывать его я, пожалуй, не буду – хорошего понемножку =)

Перейдём к ещё более интересному разделу:

## ****Определённый интеграл и его свойства****

Настал момент, который все ждали, затаив дыхание. Что такое определённый интеграл http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image096.gif и почему он есть площадь? Да и откуда взялся сам значок интеграла? Вот мы много раз слышали: «интеграл, интеграл, интеграл, …». Но понятие же не из космоса прилетело! Читаем:  
  
Пусть функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image098.gif определена на промежутке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100.gif. Для определённости и простоты считаем, что функция положительна http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image102.gif и [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на данном отрезке. **Поставим задачу найти площадь** http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image104.gif**криволинейной трапеции**, ограниченной графиком функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image098_0000.gif, прямыми http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image107.gif и осью http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image109.gif. Обращаю внимание на тот факт, что непрерывность функции на отрезке заведомо гарантирует существование конечной площади http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image104_0000.gif.

Разобьём отрезок http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0000.gif на http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image112.gif частей следующими точками:   
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image114.gif (красные точки):  


В результате получено http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image112_0000.gif частичных промежутков http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image119.gif с длинами http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image121.gif соответственно. В общем случае длины  различны – какие-то отрезки короче, какие-то длиннее. Максимальную длину называют **диаметром разбиения** и обозначают буквой «лямбда»: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image123.gif.

**Примечание**: последняя запись читается, как «максимальное значение из множества (набора) *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image125.gif*»

**Примечание**: последняя запись читается, как «максимальное значение из множества (набора) *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image125.gif*»

В каждом из полученных промежутков опять же произвольно выбираем точки http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image127.gif (синие квадратики).

**Примечание**: *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image129.gif* («кси») – 14-я буква греческого алфавита

Рассмотрим http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image131.gif промежуток http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image133.gif. Его длина, очевидно, равна http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image135.gif (зелёная обоюдоострая линия). Значению аргумента http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image137.gif соответствует значение  функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image139.gif (синие пунктирные линии), и произведение http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image141.gif в точности равно **площади** соответствующего коричневого прямоугольника.

Аналогично устроен каждый отрезок. Составим сумму, которая равна площади коричневой ступенчатой фигуры:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image143.gif

Данная сумма называется **интегральной суммой**, и её часто записывают в свёрнутом виде:   
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image145.gif

**Примечание**: *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image147.gif*– это значок суммы, а переменная *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image149.gif* – своеобразный «счётчик», т.е. сначала *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image151.gif*, затем *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image153.gif*, потом *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image155.gif*, … и, наконец, *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image157.gif*

Что означает прилагательное «интегральной»? В широком смысле слова, **интегрировать – это значит, что-то объединять**. В данном случае интегральная сумма http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image159.gif **объединяет** площади коричневых прямоугольников и с некоторой точностью приближает площадь криволинейной трапеции: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image161.gif

Теперь зададимся вопросом: **как улучшить точность приближения**? Действия очевидны  – увеличиваем и увеличиваем значение http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image112_0001.gif. При этом количество отрезков http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image119_0000.gif **растёт**, а их длины http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image164.gif – **уменьшаются**, в том числе неизбежно уменьшается и максимальная длина http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image166.gif. Количество точек http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image168.gif тоже возрастает и ступенчатая фигура всё больше и больше напоминает криволинейную трапецию.

И, если количество отрезков разбиения устремить к бесконечности http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image170.gif, то интегральная сумма (площадь ступенчатой фигуры) будет стремиться к площади криволинейной трапеции: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image172.gif.

Таким образом, площадь криволинейной трапеции равна пределу интегральной суммы при диаметре разбиения, стремящемся к нулю:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image174.gif

Наблюдаем за удивительным превращением:

1) В рассматриваемом контексте сумму http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image147_0000.gifещё с 17 века обозначали растянутой буквой S (Summa). Это обозначение известно как значок интеграла:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image177.gif

2) Если http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image170_0000.gif (и, следовательно, http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image179.gif), то значения http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image181.gif стремятся «покрыть» **все** значения функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0011.gif из промежутка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0001.gif,  то есть:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image184.gif, при этом пределы интегрирования: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image186.gif

3) И, наконец, длина любого промежуточного отрезка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image188.gif становится [бесконечно малой](http://www.mathprofi.ru/beskonechno_malye_funkcii_zamechatelnye_ekvivalentnosti.html). Обозначение этой бесконечно малой длины мы тоже хорошо знаем, оно указывает, что объединение ведётся по переменной «икс»:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image190.gif

**В результате, площадь криволинейной трапеции**: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image192.gif

**Определение**: конечный предел интегральной суммы http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image194.gif при http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image179_0000.gif, **не зависящий** ни от способа дробления отрезка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0002.gif, ни от выбора точек http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image137_0000.gif, называется **определённым интегралом** функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0012.gif по промежутку http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0003.gif и обозначается символом http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image198.gif.

При этом функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0013.gif называется **интегрируемой** в промежутке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0004.gif. Для интегрируемости (а, значит, существования конечной площади), напоминаю, достаточно [непрерывности](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) функции на отрезке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0005.gif. Если же на данном промежутке есть участки, где функция, например, [не определена](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html) (нет её графика), то конечного предела http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image200.gif и, соответственно, определённого интеграла http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image198_0000.gif не существует.

В каждом из полученных промежутков опять же произвольно выбираем точки http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image127.gif (синие квадратики).

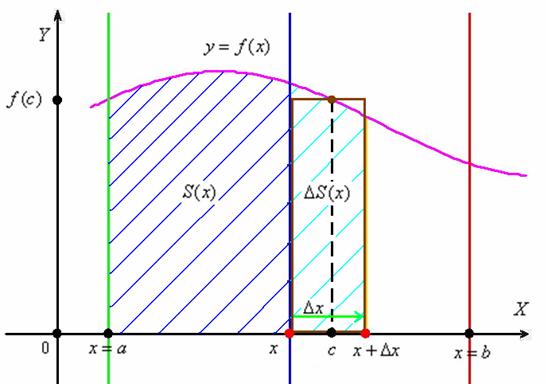
**Примечание**: *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image129.gif* («кси») – 14-я буква греческого алфавита

**По аналогичному принципу** (дробление отрезка, выбор промежуточных точек, нахождение интегральной суммы, предел и предельный переход) **выводятся другие тематические формулы**: [объема тела вращения](http://www.mathprofi.ru/obyem_tela_vrashenija.html), [длины дуги кривой](http://www.mathprofi.ru/dlina_dugi_krivoi.html), [площади поверхности вращения](http://www.mathprofi.ru/ploshad_poverhnosti_vrashenija.html) и т. д. Надеюсь, теперь вам будет значительно легче разобраться в соответствующем теоретическом материале.

Если что-то осталось недопонятым, текст следует не спеша перечитать заново либо вернуться к нему позже. Наиболее вероятные затруднения здесь связаны с альфой и омегой математического анализа – предельным переходом; в этом случае советую основательно проштудировать статьи о [пределах](http://www.mathprofi.ru/predely_primery_reshenii.html) и [теории производной функции](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html).

Всё было бы хорошо, но формулу http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image192_0000.gif очень трудно применить на практике (даже для простых функций), поэтому возникает задача отыскания более эффективного пути расчёта площади. И такой путь действительно существует – ведь из определения определённого интеграла следует, что он не зависит от способа разбиения промежутка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0006.gif и от выбора точек http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image137_0001.gif. **Важен лишь только** нижний предел интегрирования «а», верхний предел интегрирования «бэ» и сама функция «эф от икс».

### ****Вывод формулы Ньютона-Лейбница****

Рассмотрим тот же график http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0014.gif и познакомимся с функцией переменной площади http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205.gif. Что это за функция? Зафиксируем произвольную точку http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image014_0000.gif (левая красная точка), лежащую между точками «а» и «бэ»:  


В данной точке функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0000.gif равна площади криволинейной трапеции, которая расположена между зелёной и синей линиями и заштрихована синим цветом. Мысленно начните уменьшать значение «икс» и сдвигать синюю прямую влево – площадь http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0001.gifначнёт уменьшаться и, в конце концов, в точке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image210.gif станет равной нулю: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image212.gif(прямые совпадут). Теперь возвращаемся на исходную

В данной точке функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0000.gif равна площади криволинейной трапеции, которая расположена между зелёной и синей линиями и заштрихована синим цветом. Мысленно начните уменьшать значение «икс» и сдвигать синюю прямую влево – площадь http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0001.gifначнёт уменьшаться и, в конце концов, в точке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image210.gif станет равной нулю: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image212.gif(прямые совпадут). Теперь возвращаемся на исходную позицию и сдвигаем синюю линию вправо – в этом случае площадь http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0002.gif начнёт расти. И когда мы достигнем верхнего предела http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image214.gif (синяя прямая «закроет» красную), площадь будет равна в точности площади всей криволинейной трапеции: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image216.gif.

Таким образом, аргумент может изменяться в пределах http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image218.gif, при этом функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0003.gif(площадь) будет возрастать от http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image212_0000.gif до http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image216_0000.gif.

**Докажем, что функция переменной площади http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0004.gif является первообразной функцией для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0015.gif,  то есть докажем, что http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image223.gif**.

Вернёмся к нашей точке «икс» и зададим в ней приращение http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image225.gif (зелёная стрелка). Для определённости полагаем, что http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image227.gif (случай http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image229.gif доказывается аналогично). Приращение аргумента http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image225_0000.gif влечёт приращение функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image231.gif – геометрически это площадь криволинейной трапеции, которая заштрихована голубым цветом.

По так называемой теореме о среднем, на отрезке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image233.gif **существует** точка «цэ» – **такая**, что площадь коричневого прямоугольника равна площади голубой трапеции:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image235.gif

**Примечание**: этот участок чертежа схематичен, поскольку мне трудно подобрать идеально точное местоположение точки «цэ»

По [определению производной](http://www.mathprofi.ru/opredelenie_proizvodnoi_smysl_proizvodnoi.html), производная функции – это отношение приращения функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image231_0000.gif к приращению аргумента http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image225_0001.gif при http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image239.gif:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image241.gif.

И, ввиду равенства http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image243.gif:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image245.gif

(\*) Так как http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image239_0000.gif, то точка «цэ» бесконечно близко приближается к точке «икс», и, соответственно: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image248.gif

Таким образом, **для любого** http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image014_0001.gif из рассматриваемого промежутка справедливо равенство http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image251.gif, означающее, что функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0005.gif является первообразной для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0016.gif.

По теореме, доказанной в самом начале урока, множество всех первообразных представимо в виде http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image255.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0003.gif – какая-нибудь другая первообразная для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0017.gif.

Теперь в данное равенство подставляем http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image210_0000.gif и соответствующее значение площади http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image212_0001.gif:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image260.gif, откуда следует, что http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image262.gif  
  
Найденное значение константы http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image262_0000.gif подставляем в http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image255_0000.gif:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image266.gif

Выруливаем на финишную прямую. При http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image214_0000.gif функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image205_0006.gif принимает значение, равное площади всей криволинейной трапеции: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image216_0001.gif. Подставим http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image214_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image216_0002.gif в уравнение http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image266_0000.gif:

http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image272.gif

Следует отметить, что в учебниках по высшей математике вывод этой формулы проводится в более солидном ключе – с помощью интеграла с переменным верхним пределом. Я же ограничился упрощенной версией доказательства, чтобы материал был понятен бОльшему количеству читателей.

Это ещё, кстати, не всё =) Завершаем мысль:

В предыдущем параграфе мы доказали, что площадь криволинейной трапеции – есть предел интегральной суммы: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image192_0001.gif.

Но с другой стороны, http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image272_0000.gif.

И из этих двух фактов следует лаконичная **формула Ньютона-Лейбница**:

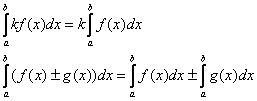
Но с другой стороны, http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image272_0000.gif.

И из этих двух фактов следует лаконичная **формула Ньютона-Лейбница**:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image276.gif, где http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0004.gif – первообразная функция для функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0018.gif.

Множество практических примеров на применение формулы можно найти в статьях [Определённый интеграл. Примеры решений](http://www.mathprofi.ru/opredelennye_integraly_primery_reshenij.html) и [Вычисление площади с помощью определённого интеграла](http://www.mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html), а также в последующих статьях раздела.

### ****Рассмотрим основные свойства определённого интеграла****

– Свойство, которое уже фигурировало в предыдущем пункте: интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image002_0001.gif. Графическая интерпретация очевидна: криволинейная трапеция вырождается в отрезок, а площадь отрезка с геометрической точки зрения равна нулю.

– Свойства линейности:  
  
Уважительно промолчим.

– Если у интеграла поменять местами пределы интегрирования, то он сменит знак:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image006_0000.gif

Почему? Пусть для определённости http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0019.gif. Тогда при перестановке пределов интегрирования разбиение отрезка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0005.gif будет проводиться справа налево (вспоминаем ступенчатую фигуру 1-го чертёжа), и длины частичных промежутков формально станут отрицательными http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image012_0002.gif, поэтому интегральная сумма http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image014_0002.gif и сам интеграл (как предел суммы) сменит знак.

Следует заметить, что на практике намного чаще пользуются вторым случаем – когда изначально http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image016_0000.gif, например:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image018_0002.gif  
Цель этих действий – расставить пределы интегрирования в привычном порядке, хотя исходный интеграл http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image020_0000.gif и так рассчитывается без всяких проблем. Однако не редкость, когда перестановка пределов интегрирования не только удобна, но и рациональна.

– Какими бы ни были точки http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image022_0000.gif:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image024_0002.gif

Здесь в первую очередь, конечно же, напрашивается ситуация, когда точка «цэ» лежит внутри отрезка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0006.gif. Просто и естественно – криволинейную трапецию можно разделить на две части, т.е. изначальная площадь будет равна сумме площадей.

Но данное свойство работает и в «нестандартном» случае, когда точка «цэ» лежит вне промежутка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0007.gif. Желающие могут проанализировать это самостоятельно.

– **Пожалуйста, запомните!** Если подынтегральная функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image026_0000.gif, то http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image028_0000.gif (здесь и далее полагаем, что *http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image008_0020.gif*). И, наоборот, если http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image031.gif, то интеграл будет неположительным: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image033_0001.gif.

Свойство элементарно доказывается: снова вспоминаем, что http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image035_0002.gif. Длины частичных промежутков положительны: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image037_0000.gif, но в первом случае значения функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image039.gif (криволинейная трапеция лежит не ниже оси абсцисс), а во втором случае http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image041_0001.gif (криволинейная трапеция лежит не выше оси абсцисс)

Таким образом, если при вычислении интеграла http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image043.gif у вас получилось отрицательное значение – ищите ошибку. Функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image045.gif на промежутке интегрирования http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image047.gif (и, к слову, вообще на любом ненулевом промежутке), поэтому интеграл http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image043_0000.gif обязательно должен получиться положительным.

Наоборот – если интеграл http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image049.gif получился положительным, то здесь тоже где-то допущена ошибка, поскольку http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image051.gif на отрезке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image053.gif.

**! Совет**: перед решением любого определённого интеграла всегда полезно проанализировать знак подынтегральной функции!

– **Ещё одно важное свойство**. Если функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image055.gif интегрируемы на http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0008.gif, и для всех «икс» из данного промежутка справедливо неравенство http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image058.gif, то  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image060.gif

Тоже всё наглядно – график функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image062.gif расположен не ниже графика функции http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image064.gif, поэтому площадь http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image066.gif будет не меньше, а на практике почти всегда – **больше** площади http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image068.gif.

Из данного свойства следует **важнейшая рабочая формула** вычисления площади фигуры, ограниченной графиками функций http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image070.gif и прямыми http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image072.gif:  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image074.gif

– Если http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image076.gif на http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0009.gif, то http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image078.gif

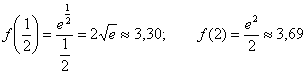
Рассмотрим конкретную задачу, поясняющую геометрический смысл данного свойства, а то я чувствую, вы уже изнываете без практики =)

Пример 1

Оценить определенный интеграл http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image080.gif

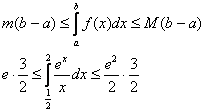
**Решение**: подынтегральная функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image082.gif [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) на отрезке http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image084_0000.gif, а значит, достигает на нём http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image086_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image088_0000.gif – [наименьшего и наибольшего значений](http://www.mathprofi.ru/naibolshee_i_naimenshee_znacheniya_funkcii_na_otrezke.html). Решаем стандартную двухшаговую задачу по нахождению **http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image090_0000.gif**:

1) Вычислим значения функции в [критических точках](http://www.mathprofi.ru/vozrastanie_ubyvanie_ekstremumy_funkcii.html), принадлежащих отрезку:   
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image092_0000.gif  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image094_0000.gif – критическая точка.  
http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image096_0000.gif

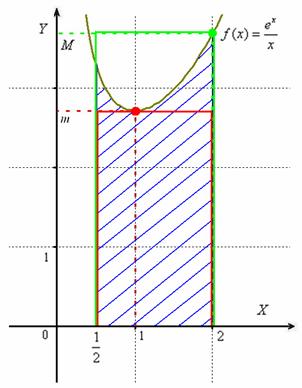
2) Вычислим значения функции на концах отрезка:  


Таким образом: **http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image100_0007.gif**

Длина отрезка интегрирования: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image102_0000.gif

В результате, оценка определённого интеграла:  


**Ответ**: http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image106.gif

Геометрически это означает, что площадь http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image080_0000.gif криволинейной трапеции (синяя штриховка) **не меньше** площади красного прямоугольника http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image109_0000.gif и **не больше** площади зелёного прямоугольника http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image111.gif:  
  
Да, оценка, конечно, очень грубая, но таково задание и оно иногда встречается в контрольных работах. Кстати, интеграл http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image115.gif является неберущимся, и вычислить заштрихованную площадь можно лишь с определённой точностью, например, [методом трапеций](http://www.mathprofi.ru/formula_simpsona_metod_trapecij.html), [по формуле Симпсона](http://www.mathprofi.ru/formula_simpsona_metod_trapecij.html), [с помощью разложения функции в ряд](http://www.mathprofi.ru/vychislenie_integrala_razlozheniem_v_ryad.html), др. способами.

– И в заключение параграфа – **теорема о среднем**: если функция http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image062_0000.gif непрерывна на http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image010_0010.gif, то существует точка http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image119_0001.gif – такая, что http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image121_0000.gif. Геометрический смысл  теоремы я уже использовал при выводе формулы Ньютона-Лейбница, единственное, там речь шла о кусочке криволинейной трапеции, здесь же – о всей фигуре. Грубо говоря, всегда существует прямоугольник со стороной http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image123_0000.gif (длина отрезка интегрирования), площадь которого равна площади http://www.mathprofi.ru/m/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov_clip_image066_0000.gif.

Доказательство опустим, поскольку в нём фигурируют другие теоремы математического анализа.