Дата: 22.12.2020-25.12.2020

Группа: т-12

Предмет: Математика

Тема: «Формулы приведения.», «Основные формулы.», «Формулы сложения.», «Формулы кратного аргумента. Формулы понижения степени».

**Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

22.12.2020.

Формулы приведения

Прежде всего, получим формулы, по которым тригонометрические функции углов вида https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595356-1.gifможно выражать через тригонометрические функции угла α. Эти формулы называются формулами приведения.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/chapter2/section4/paragraph2/images/020402_1.gif1 |
| Рисунок 2.4.2.1 |

Отложим от положительного направления оси абсцисс угол α (см. рис. 2.4.2.1). Отразим точку A, отвечающую этому углу, относительно прямой y = x. Пусть она при отражении перейдёт в точку B. Так как координатные оси тоже симметричны относительно прямой y = x, то угол между осью ординат и радиус-вектором https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595387-2.gifравен α.

Несложно сообразить, что угол между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595387-3.gifравен https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595403-4.gifПусть координаты радиус-вектора https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595434-5.gifбудут (x; y), а координаты радиус-вектора https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595434-6.gifбудут (x'; y'). Так как при отражении относительно прямой y = x ось абсцисс переходит в ось ординат, то абсцисса радиус-вектора https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595465-7.gifстанет ординатой радиус-вектора https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595465-8.gifи наоборот. Следовательно, x = y', y = x'. Но координаты x и y можно найти с помощью угла α: x = cos α, y = sin α. Аналогичные формулы связывают координаты радиус-вектора https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595512-9.gif

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595528-10.gif |

Так как x = y' и y = x', то получаем:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595543-11.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595543-12.gif |

Рассмотрим радиус-вектор https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595559-13.gifугол между которым и осью абсцисс равен –α. Очевидно, что координаты этого радиус-вектора равны (x; –y). Но абсцисса и ордината этого вектора есть синус и косинус угла –α. Следовательно,

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595590-14.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595606-15.gif |

Отсюда легко получить, что

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595637-16.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595637-17.gif |

Последние равенства означают, что функции синус, тангенс и котангенс − нечётные, а функция косинус − чётная.

Заменим в формулах https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595715-18.gifи https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595731-19.gifугол α на –α. Имеем

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595746-20.gif |

Итак, доказано, что

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595746-21.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595746-22.gif |

Выполним следующие преобразования:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595746-23.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595746-24.gif |

Итак,

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595762-25.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595793-26.gif |

Аналогично доказываются формулы:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595793-27.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595824-28.gif |

Из последних формул следует, что

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595856-29.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595871-30.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595871-31.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595871-32.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595887-33.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595887-34.gif |

Учтём теперь, что

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595918-35.gif   https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595918-36.gif |

Тогда из вышеприведённых формул следует:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595918-37.gif   https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595934-38.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595949-39.gif  https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595965-40.gif |

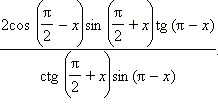
|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595981-41.gif  https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595981-42.gif |

Запишем все формулы приведения в виде таблицы.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595981-43.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551595981-44.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596012-45.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596012-46.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596012-47.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596059-48.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596074-49.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596074-50.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596074-51.gif | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596074-52.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596074-53.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596090-54.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596090-55.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596090-56.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596106-57.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596121-58.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596168-59.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596184-60.gif | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596184-61.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596199-62.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596215-63.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596215-64.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596231-65.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596231-66.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596246-67.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596262-68.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596262-69.gif | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596262-70.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596278-71.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596309-72.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596324-73.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596324-74.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596324-75.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596340-76.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596340-77.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596356-78.gif | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596356-79.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596387-80.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596403-81.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596403-82.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596403-83.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596403-84.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596403-85.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596418-86.gif | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596434-87.gif | |
| Таблица 2.4.2.1 |

**Пример 1**

Упростите выражение:



|  |
| --- |
| Имеем:  https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596465-89.gif  Ответ: 2 cos x. |

23.12.2020

Основные формулы

Обратимся снова к тригонометрической окружности.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/chapter2/section4/paragraph2/images/020402_2.gif2 |
| Рисунок 2.4.2.2 |

Пусть точка A является концом радиус-вектора, отвечающего углу α. Пусть также OA = 1. Построим прямоугольный треугольник AOC. Применяя к этому треугольнику теорему Пифагора, получаем:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596481-90.gif |

Но OA = 1,  OC = cos α,  CA = sin α. Значит, непосредственным следствием теоремы Пифагора является равенство

|  |  |
| --- | --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/design/images/def_pt.gif   |  | | --- | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596481-91.gif |   Это равенство называется основным тригонометрическим тождеством.  https://mathematics.ru/courses/algebra/design/images/def_pt.gif |

Отсюда следует, что

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596481-92.gif  https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596481-93.gif |

Знак + или − выбирается в зависимости от того, в какой четверти лежит угол α.

Разделим основное тригонометрическое тождество на https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596496-94.gifПолучим:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596496-95.gif |

Разделим основное тригонометрическое тождество на https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596512-96.gifПолучим:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596528-97.gif |

Из определений тангенса и котангенса https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596528-98.gifследует:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596528-99.gif |

**Пример 2**

Найдите sin x  и  cos x, если https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596528-100.gifи https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596528-101.gif

[Показать решение](javascript:changeDecision(document.all.decision2,%20document.all.decisionname2))

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Так как https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596528-102.gifто sin x < 0 и cos x < 0. Имеем:   |  | | --- | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596543-103.gif |  |  | | --- | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596543-104.gif |   Ответ. https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596543-105.gif |

**Пример 3**

Упростить выражение:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596543-106.gif |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596543-107.gif  https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596559-108.gif  https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596574-109.gif  Ответ: https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596574-110.gif |

24.12.2020  
Формулы сложения

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/chapter2/section4/paragraph2/images/020402_3.gif3 |
| Рисунок 2.4.2.3 |

Для вывода формул сложения для тригонометрических функций рассмотрим тригонометрическую окружность и два радиус-вектора https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596637-111.gifи https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596653-112.gifотвечающих углам α и –β (см. рис. 2.4.2.3).

Координаты этих векторов по определению тригонометрических функций равны: https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596653-113.gifПоскольку это радиус-векторы, то их длины равны 1. Вычислим скалярное произведение этих векторов двумя способами:

1. По определению.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596653-114.gif |

поскольку угол между единичными векторами https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596653-115.gifи https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596653-116.gifравен α + β.

2. Через координаты. Имеем:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596668-117.gif |

Итак, получена следующая формула сложения:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596684-118.gif |

Заменим в этой формуле β на –β. Получим ещё одну формулу.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596699-119.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596699-120.gif |

Имеем:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596715-121.gif |

Значит,

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596731-122.gif |

Заменим в этой формуле β на –β, получим ещё одну формулу.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596731-123.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596731-124.gif |

Из этих формул непосредственно следует, что

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596731-125.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596731-126.gif |

Последняя формула справедлива при

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596746-127.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596746-128.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596746-129.gif |

Эта формула справедлива при https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596778-130.gif

Заменяя в последних формулах β на –β, получим ещё две формулы:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596778-131.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596778-132.gif |

Последняя формула справедлива при https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596778-133.gif

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596778-134.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596778-135.gif |

Эта формула справедлива при https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596793-136.gif

**Пример 4**

Упростите выражения:

1) https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596824-137.gif

2) https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596824-138.gif

25.12.2020

Формулы кратного аргумента

Итак, нами получены все формулы сложения для тригонометрических функций. Получим из них прямые следствия, положив в них во всех α = β.

|  |
| --- |
| sin 2α = 2 sin α cos α; |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596887-143.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596949-144.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596949-145.gif |

Эти формулы называются формулами двойного угла.

Воспользуется теперь второй из этих формул и основным тригонометрическим тождеством. Получим:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596949-146.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596965-147.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596965-148.gif |

Если же теперь воспользоваться формулой разности квадратов, то получится

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596981-149.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596981-150.gif |

Если в формулах сложения положить, например, β = 2α, то получим формулы кратного аргумента.

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551596996-151.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597012-152.gif |

Совершенно аналогично получается формула

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597012-153.gif |

Полученные формулы называются формулами кратного аргумента. Аналогично можно получить формулы синуса и косинуса 4α, 5α и т. д.

**Пример 5**

Вычислите tg x, если https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597028-154.gif

|  |  |
| --- | --- |
| Так как https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597059-155.gifто https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597059-156.gifИмеем:   |  | | --- | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597059-157.gif |   Делаем замену t = tg x и получаем уравнение https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597059-158.gifкорни которого https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597059-159.gifТак как https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597059-160.gifто нас интересует только отрицательный корень. Следовательно, https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597090-161.gif  Ответ. https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597090-162.gif |

**Пример 6**

Упростите выражение https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597106-163.gif

|  |  |
| --- | --- |
| |  | | --- | | https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597121-164.gif |   Ответ. −2. |

Универсальная подстановка

Перепишем теперь формулу синуса двойного угла в следующем виде:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597121-165.gif |

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597121-166.gif |

Аналогично можно поступить с косинусом двойного угла. Получается

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597121-167.gif |

Разделив последнюю формулу на предпоследнюю, имеем:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597121-168.gif |

Последние три формулы и формулу тангенса двойного угла часто записывают в следующем виде:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597153-169.gif https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-170.gif https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-171.gif https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-172.gif |

Эти формулы показывают, что все основные тригонометрические функции могут быть рационально выражены через https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-173.gifа именно:

|  |
| --- |
| https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-174.gif https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-175.gif https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-176.gif https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-177.gif |

Говорят, что замена https://mathematics.ru/courses/algebra/content/javagifs/63261551597168-178.gifявляется универсальной подстановкой для основных тригонометрических функций.