Дата: 11.01.2021, 13.01.2021

Группа: м-22

Предмет: Математика Тема: «**Определенный интеграл. Примеры решений**»

**Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

# ****Определенный интеграл. Примеры решений****

И снова здравствуйте. На данном уроке мы подробно разберем такую замечательную вещь, как определенный интеграл. На этот раз вступление будет кратким. Всё. Потому что снежная метель за окном.

 Для того чтобы научиться решать определенные интегралы необходимо:

1) Уметь находить неопределенные интегралы.

2) Уметь вычислить определенный интеграл.

Как видите, для того чтобы освоить определенный интеграл, нужно достаточно хорошо ориентироваться в «обыкновенных» неопределенных интегралах. Поэтому если вы только-только начинаете погружаться в интегральное исчисление, и чайник еще совсем не закипел, то лучше начать с урока [Неопределенный интеграл. Примеры решений](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html). Кроме того, есть [pdf-курсы](http://mathprofi.com/knigi_i_kursy/) для **сверхбыстрой подготовки** – если у вас в запасе буквально день, пол дня.

В общем виде определенный интеграл записывается так:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image002.gif  
  
Что прибавилось по сравнению с неопределенным интегралом? Прибавились пределы интегрирования.

Нижний предел интегрирования стандартно обозначается буквой http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image004.gif.  
Верхний предел интегрирования стандартно обозначается буквой http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image006.gif.  
Отрезок http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image008.gif называется отрезком интегрирования.

Прежде чем мы перейдем к практическим примерам, небольшое faq по определенному интегралу.

[Что такое определенный интеграл?](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html) Считаю немного преждевременным рассказать про разбиения отрезка и предел интегральных сумм, поэтому пока я скажу, что определенный интеграл – это ЧИСЛО. Да-да, самое что ни на есть обычное число.

**Есть ли у определенного интеграла геометрический смысл?** Есть. И очень хороший. Самая популярная задача – [вычисление площади с помощью определенного интеграла](http://www.mathprofi.ru/vychislenie_ploshadi_c_pomoshju_opredelennogo_integrala.html).

**Что значит решить определенный интеграл?** Решить определенный интеграл – это значит, найти число.

**Как решить определенный интеграл?** С помощью знакомой со школы [формулы Ньютона-Лейбница](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html):

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image010.gif

Формулу лучше переписать на отдельный листочек, она должна быть перед глазами на протяжении всего урока.

Этапы решения определенного интеграла следующие:

1) Сначала находим первообразную функцию http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image012.gif (неопределенный интеграл). Обратите внимание, что константа http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image014.gif в определенном интеграле **не добавляется**. Обозначение http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image016.gifявляется чисто техническим, и вертикальная палочка не несет никакого математического смысла, по сути – это просто отчёркивание. Зачем нужна сама запись http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image018.gif?  Подготовка для применения формулы Ньютона-Лейбница.

2) Подставляем значение верхнего предела в первообразную функцию: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image020.gif.

3) Подставляем значение нижнего предела в первообразную функцию: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image022.gif.

4) Рассчитываем (без ошибок!) разность http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image024.gif, то есть, находим число.

Готово.

**Всегда ли существует определенный интеграл?** Нет, не всегда.

Например, интеграла http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image026.gif не существует, поскольку отрезок интегрирования http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image028.gif не входит в [область определения](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html) подынтегральной функции (значения под квадратным корнем не могут быть отрицательными). А вот менее очевидный пример: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image030.gif. Здесь на отрезке интегрирования http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image036.gif[тангенс](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) терпит [бесконечные разрывы](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) в точках http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image032.gif, http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image034.gif, и поэтому такого определённого интеграла тоже не существует. Кстати, кто еще не прочитал методический материал [Графики и основные свойства элементарных функций](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html) – самое время сделать это сейчас. Будет здорово помогать на протяжении всего курса высшей математики.

Для того **чтобы определенный интеграл вообще существовал, достаточно чтобы подынтегральная функция была** [непрерывной](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) **на отрезке интегрирования**.

Из вышесказанного следует первая важная рекомендация: перед тем, как приступить к решению ЛЮБОГО определенного интеграла, нужно убедиться в том, что подынтегральная функция [непрерывна](http://www.mathprofi.ru/nepreryvnost_funkcii_i_tochki_razryva.html) **на отрезке интегрирования**. По студенческой молодости у меня неоднократно бывал казус, когда я подолгу мучался с нахождением трудной первообразной, а когда наконец-то ее находил, то ломал голову еще над одним вопросом: «что за ерунда получилась?». В упрощенном варианте ситуация выглядит примерно так:

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image038.gif???! Нельзя подставлять отрицательные числа под корень! Что за фигня?! Изначальная невнимательность.

Если для решения (в контрольной работе, на зачете, экзамене) Вам предложен интеграл вроде http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image026.gifили http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image030_0000.gif, то нужно дать ответ, что данного определённого интеграла не существует и обосновать – почему.

**! Примечание**: в последнем случае слово «определённого» опускать нельзя, т.к. интеграл с точечными разрывами разбивается на несколько, в данном случае на 3 несобственных интеграла, и формулировка «данного интеграла не существует» становится некорректной.

**Может ли определенный интеграл быть равен отрицательному числу?** Может. И отрицательному числу. И нулю. Может даже получиться бесконечность, но это уже будет [несобственный интеграл](http://www.mathprofi.ru/nesobstvennye_integraly.html), коим отведена отдельная лекция.

**Может ли нижний предел интегрирования быть больше верхнего предела интегрирования?** Может, и такая ситуация реально встречается на практике.

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image040.gif –  интеграл преспокойно вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница.

Без чего не обходится высшая математика? Конечно же, без всевозможных свойств. Поэтому рассмотрим некоторые [свойства определенного интеграла](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html).

**В определенном интеграле можно переставить верхний и нижний предел, сменив при этом знак**:  
  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image042.gif

Например, в определенном интеграле перед интегрированием http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image040_0000.gif целесообразно поменять пределы интегрирования на «привычный» порядок:

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image044.gif – в таком виде интегрировать  значительно удобнее.

Как и для [неопределенного интеграла](http://www.mathprofi.ru/integraly_primery_reshenij.html), для определенного интеграла справедливы [свойства линейности](http://www.mathprofi.ru/chto_takoe_integral_teorija_dlja_chainikov.html):

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image046.gif

http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image048.gif – это справедливо не только для двух, но и для любого количества функций.

В определенном интеграле можно проводить [замену переменной интегрирования](http://www.mathprofi.ru/metod_zameny_peremennoi.html), правда, по сравнению с неопределенным интегралом тут есть своя специфика, о которой мы еще поговорим.

Для определенного интеграла справедлива [формула интегрирования по частям](http://www.mathprofi.ru/integrirovanie_po_chastyam.html):  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image050.gif

Пример 1

Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image052.gif

Решение:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image054.gif

(1) Выносим константу за знак интеграла.

(2) Интегрируем по таблице с помощью самой популярной формулы http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image056.gif. Появившуюся константу http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image058.gif целесообразно отделить от http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image060.gif и вынести за скобку. Делать это не обязательно, но желательно – зачем лишние вычисления?

(3) Используем формулу Ньютона-Лейбница http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image062.gif. Сначала подставляем в http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image060_0000.gif верхний предел, затем – нижний предел. Проводим дальнейшие вычисления и получаем окончательный ответ.

Пример 2

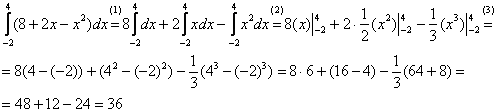
Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image065.gif

Это пример для самостоятельно решения, решение и ответ в конце урока.

Немного усложняем задачу:

Пример 3

Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image067.gif

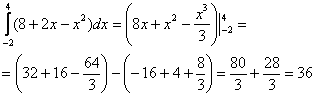
Решение:  


(1) Используем свойства линейности определенного интеграла.

(2) Интегрируем по таблице, при этом все константы выносим – они не будут участвовать в подстановке верхнего и нижнего предела.

(3) Для каждого из трёх слагаемых применяем формулу Ньютона-Лейбница:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image071.gif  
СЛАБОЕ ЗВЕНО в определенном интеграле – это ошибки вычислений и часто встречающаяся ПУТАНИЦА В ЗНАКАХ. Будьте внимательны! Особое внимание заостряю на третьем слагаемом: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image073.gif – первое место в хит-параде ошибок по невнимательности, очень часто машинально пишут http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image075.gif (особенно, когда подстановка верхнего и нижнего предела проводится устно и не расписывается так подробно). Еще раз внимательно изучите вышерассмотренный пример.

Следует заметить, что рассмотренный способ решения определенного интеграла – не единственный. При определенном опыте, решение можно значительно сократить. Например, я сам привык решать подобные интегралы так:



Здесь я устно использовал правила линейности, устно проинтегрировал по таблице. У меня получилась всего одна скобка с отчёркиванием пределов: http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image079.gif (в отличие от трёх скобок в первом способе). И в «целиковую» первообразную функцию, я сначала подставил сначала 4, затем –2, опять же выполнив все действия в уме.

Какие недостатки у короткого способа решения? Здесь всё не очень хорошо с точки зрения рациональности вычислений, но лично мне всё равно – обыкновенные дроби я считаю на [калькуляторе](http://www.mathprofi.ru/files/drobovik.xls).  
Кроме того, существует повышенный риск допустить ошибку в вычислениях, таким образом,  студенту-чайнику лучше использовать первый способ, при «моём» способе решения точно где-нибудь потеряется знак.

Однако несомненными преимуществами второго способа является быстрота решения, компактность записи и тот факт, что первообразная http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image081.gif находится в одной скобке.

**Совет: перед тем, как использовать формулу Ньютона-Лейбница, полезно провести проверку: а сама-то первообразная найдена правильно?**

Так, применительно к рассматриваемому примеру: перед тем, как в первообразную функцию  http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image081_0000.gif подставлять верхний и нижний пределы, желательно на черновике проверить, а правильно ли вообще найден неопределенный интеграл? Дифференцируем:  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image083.gif

Получена исходная подынтегральная функция, значит, неопределенный интеграл найден верно. Теперь можно и формулу Ньютона-Лейбница применить.

**Такая проверка будет не лишней при вычислении любого определенного интеграла**.

Пример 4

Вычислить определенный интеграл  
http://www.mathprofi.ru/f/opredelennye_integraly_primery_reshenij_clip_image085.gif

Это пример для самостоятельно решения. Попробуйте решить его коротким и подробным способом.