Дата: 26, 28, 29 января 2021г

Группа: к-11

Предмет: Математика Тема:Графики тангенса и котангенса. Графики обратных тригонометрических функций. Преобразования графиков.

**Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

**Графики тригонометрических функций**

Повторим с прошлого занятия

Построим график функции 



Данная линия называется *синусоидой*.

Напоминаю, что «пи» – это иррациональное число: .

Основные свойства функции :

Данная функция является **периодической** с периодом . Что это значит? Посмотрим на отрезок . Слева и справа от него бесконечно повторяется точно такой же кусок графика.

[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): , то есть для любого значения «икс» существует значение синуса.

Область значений: . Функция  является **ограниченной**: , то есть, все «игреки» сидят строго в отрезке .
Такого не бывает:  или , точнее говоря, бывает, но указанные уравнения не имеют решения.

**Синус – это функция нечетная**, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: . Таким образом, если в вычислениях встретится, например, , то **минус терять здесь ни в коем случае нельзя!** Он выносится: 

В практических вычислениях желательно (и даже обязательно) знать и помнить следующие значения синуса: , , .

**График косинуса**

Построим график функции 



**График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси  на  влево**
(см. также Пример 8 урока [**о геометрических преобразованиях графиков**](http://www.mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html)).

Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. За некоторым, но существенным исключением.

**Косинус – это функция четная**, ее график симметричен относительно оси  , и справедлив следующий факт: . То есть, минус перед аргументом косинуса можно безболезненно убирать (или наоборот, ставить). В отличие от синуса **в косинусе минус «бесследно пропадает»**.

Для решения практических задач нужно знать и помнить следующие значения косинуса: , , .

**Графики тангенса и котангенса**

Построим график функции 


Основные свойства функции :

Данная функция является **периодической** с периодом . То есть, достаточно рассмотреть отрезок , слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.

[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html):  – все действительные числа, кроме …  , , , … и т. д. или коротко: , где  – любое целое число. Множество целых чисел (… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в высшей математике обозначают жирной буквой **Z**.

Область значений: . Функция  **не ограничена**. В этом легко убедиться и аналитически:
 – если мы приближаемся по оси  к значению  **справа**, то ветка тангенса уходит на минус бесконечность, бесконечно близко приближаясь к своей асимптоте .
 – если мы приближаемся по оси  к значению  **слева**, то «игреки» шагают вверх на плюс бесконечность, а ветка тангенса бесконечно близко приближается к асимптоте .

**Тангенс – функция нечетная**, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса не теряется, а выносится: .

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения тангенса: , , , а также те точки, в которых тангенса не существует (см. график).

График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением . Вот его график:


Свойства попробуйте сформулировать самостоятельно, они практически такие же, как и у тангенса.

**Графики обратных тригонометрических функций**

Построим график арксинуса 


Перечислим основные свойства функции :

[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): , не существует значений вроде  или 

Область значений: , то есть,  функция  **ограничена**.

**Арксинус – функция нечетная**, здесь минус опять же выносится: .

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения арксинуса: , , . Другие распространенные значения арксинуса (а также других «арков») можно найти с помощью [**таблицы значений обратных тригонометрических функций**](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf).

Построим график арккосинуса 


Очень похоже на арксинус, свойства функции сформулируйте самостоятельно. Остановлюсь на единственном моменте. В данной статье очень много разговоров шло о четности  и нечетности функций, и, возможно, у некоторых сложилось впечатление, что функция обязательно должна быть четной или нечетной. В общем случае, это, конечно, не так. Чаще всего, функция, которая вам встретится на практике – «никакая». В частности, **арккосинус не является четной или нечетной функцией**, он как раз «никакой».

Построим график арктангенса 



Всего лишь перевернутая ветка тангенса.
Перечислим основные свойства функции :

[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): 

Область значений: , то есть,  функция  **ограничена**.
У рассматриваемой функции есть две асимптоты: , .

**Арктангенс – функция нечетная**: .

Самые «популярные» значения арктангенса, которые встречаются на практике, следующие: , .

К графику арккотангенса  приходится обращаться значительно реже, но, тем не менее, вот его чертеж:



Свойства арккотангенса вы вполне сможете сформулировать самостоятельно. Отмечу,  что арккотангенс, как и арккосинус, не является четной или нечетной функцией.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ.

## ****Сжатие (растяжение) графика к (от) оси ординат.********Симметричное отображение графика относительно оси**** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025.gif

Первая группа действий связана с умножением АРГУМЕНТА функции на число. Для удобства я разобью правило на несколько пунктов:

### ****Сжатие графика функции к оси ординат****

Это случай когда АРГУМЕНТ функции умножен на число, бОльшее единицы.

**Правило**: чтобы построить график функции , где , нужно график функции  **сжать к оси**  в  раз.

Пример 1

Построить график функции .

Сначала изобразим график синуса, его период равен :

К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку  и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра. Впрочем, многие с этим уже столкнулись.

Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её **к оси**  в 2 раза:

То есть, график функции  получается путём сжатия графика  к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: 

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:

Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

**Аналогичную блиц-проверку полезно осуществлять в любом другом примере!** Более того, она лучше поможет усвоить суть того или иного преобразования.

Пример 2

Построить график функции 

«Чёрная гармошка»  сжимается **к оси**  в 3 раза:

Итоговый график  проведён красным цветом.
Исходный период  косинуса закономерно уменьшается в три раза:  (отграничен жёлтыми точками).

### ****Растяжение графика функции от оси ординат****

Это противоположное действие, теперь баян не сжимается, а растягивается.
Случай имеет место, когда АРГУМЕНТ функции умножается на число .

**Правило**: чтобы построить график функции , где , нужно график функции  **растянуть от оси**  в  раз.

Продолжим мучить синус:

Пример 3

Построить график функции 

Берём в руки нашу «бесконечную гармошку»:


И растягиваем её **от оси**  в 2 раза:


То есть, график функции  получается путём **растяжения** графика  **от оси ординат** в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: , он толком даже не вместился на данный чертёж.

Операции сжатия/растяжения графиков, разумеется, выполнимы не только для тригонометрических функций:

**Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс**

Пример 4

Построить график функции 

График синуса  (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси  на  **влево**:

Внимательно присмотримся к полученному красному графику …. Это в точности график косинуса ! По сути, мы получили геометрическую иллюстрацию [формулы приведения](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf) , и перед вами, пожалуй, самая «знаменитая» формула, связывающая данные тригонометрические функции.  График  функции  получается путём сдвига синусоиды  вдоль оси  на  единиц влево (о чём уже говорилось на уроке [Графики и свойства элементарных функций](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)). Аналогично можно убедиться в справедливости любой другой [формулы приведения](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf).

Рассмотрим композиционное правило, когда аргумент представляет собой линейную функцию: , при этом параметр «ка» **не равен** нулю или единице, параметр «бэ» – **не равен** нулю. Как построить график такой функции? Из школьного курса мы знаем, что умножение имеет приоритет перед сложением, поэтому, казалось бы, сначала график сжимаем/растягиваем/отображаем в зависимости от значения , а потом сдвигаем на  единиц. Но здесь есть подводный камень, и корректный алгоритм таков:

Аргумент функции необходимо представить в виде  и последовательно выполнить следующие преобразования:

1) График функции  сжимаем (или растягиваем) к оси (от оси) ординат: (если , то график дополнительно следует отобразить симметрично относительно оси ).

2) График полученной функции  сдвигаем влево (или вправо) вдоль оси  абсцисс **на** **(!!!) единиц**, в результате чего будет построен искомый график .

Пример 5

Построить график функции 

Представим функцию в виде  и выполним следующие преобразования: синусоиду  (чёрный цвет):

1) сожмём **к оси**  в два раза: (синий цвет);
2) сдвинем вдоль оси  **на  (!!!) влево**:  (красный цвет):

Пример вроде бы несложный, а пролететь с параллельным переносом легче лёгкого. График сдвигается на , а вовсе не на .

**Растяжение (сжатие) графика ВДОЛЬ оси ординат.
Симметричное отображение графика относительно оси абсцисс**

Структура второй части статьи будет очень похожа.

1) Если ФУНКЦИЯ  умножается на число , то происходит **растяжение её графика вдоль оси ординат**.

**Правило**: чтобы построить график функции , где , нужно график функции  **растянуть вдоль оси**  в  раз.

2) Если ФУНКЦИЯ умножается на число , то происходит **сжатие её графика вдоль оси ординат**.

**Правило**: чтобы построить график функции , где , нужно график функции  **сжать вдоль оси**  в   раз.

Догадайтесь, какую функцию я буду снова пытать =)

Пример 6

Построить графики функций .

Берём синусоиду за макушку/пятки:

И **вытягиваем** её **вдоль оси**   в 2 раза:

Период функции  не изменился и составляет , а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается: .

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси**   в 2 раза:

Аналогично, период  не изменился, но область значений функции «сплющилась» в два раза: .

Нет, у меня нет какого-то пристрастного отношения к синусоиде, просто я хотел продемонстрировать, чем отличаются графики функций  (Примеры №№1,3) от только что построенных собратьев . Постарайтесь ещё раз проанализировать и качественнее понять эти элементарные случаи.  Даже минимальные знания о преобразованиях графиков окажут вам неоценимую помощь в ходе решения других задач высшей математики!

И, конечно же, классический пример растяжения/сжатия параболы:

Если ФУНКЦИЯ меняет знакна противоположный, то её **график отображается симметрично относительно оси абсцисс**.

**Правило**: чтобы построить график функции , нужно график  отобразить симметрично относительно оси .

Пример 7

Построить график функции 

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси :


**Сдвиг графика вверх/вниз вдоль оси ординат**

Настала пора дать передышку ногам и сесть в лифт.

Если к ФУНКЦИИ  добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) её графика вдоль оси . Рассмотрим функцию  и положительное число :

**Правила**:
1) чтобы построить график функции , нужно график  сдвинуть **ВДОЛЬ** оси  на  единиц **вверх**;
2) чтобы построить график функции , нужно график  сдвинуть **ВДОЛЬ** оси  на  единиц **вниз**.

Пример 8

Построить графики функций .

В комментариях, думаю, нет особой необходимости:


Комбинационное построение графика  в общем случае осуществляется очевидным образом:

1) График функции  растягиваем (сжимаем) вдоль оси . Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси .

2) Полученный на первом шаге график  сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы .

Пример 9

Построить график функции 

График косинуса  (чёрный цвет):

1) Растягиваем вдоль оси  в 1,5  раза:  (синий цвет);
2) Сдвигаем вдоль оси  на 2 единицы вниз: :


## ****Графики функций с модулем****

Для качественного усвоения материала необходимо понимать, что такое модуль. Краткую информацию о нём можно найти на странице [Математические формулы и таблицы](http://www.mathprofi.ru/matematicheskie_formuly.html) в справочном материале Горячие формулы школьного курса математики.

Применение модуля тоже представляет собой геометрическое преобразование графика. Не буду создавать сверхподробный мануал, отмечу только те моменты, которые, с моей точки зрения, реально пригодятся для решения других задач по вышке.

Сначала посмотрим, что происходит, когда модуль применяется к АРГУМЕНТУ функции.

**Правило**: график функции  получается из графика функции  следующим образом: при  график функции  **сохраняется**, а при  «сохранённая часть» **отображается симметрично** относительно оси .

Пример 10

Построить график функции 

И снова вечная картина:

Согласно правилу, при  график сохраняется:

И сохранившаяся часть отображается симметрично относительно оси   в левую полуплоскость:


Действительно, функция  – чётная, и её график симметричен относительно оси ординат. Поясню детальнее смысл симметрии. Посмотрим на два противоположных значения аргумента, например, на  и . А какая разница? Модуль всё равно уничтожит знак «минус»: , то есть значения функции будут располагаться на одной высоте.

Функцию от модуля можно расписать в так называемом **кусочном виде** по следующему правилу: . В данном случае:


То есть, правая волна графика  задаётся функцией , а левая волна – функцией 

Пример 11

Построить график функции .

Изобразим сами знаете что =)


И снова – то, что находиться в верхней полуплоскости – оставим в покое, а содержимое подвала – отобразим симметрично относительно оси :


Кстати, понятен ли вам неформальный смысл такого симметричного отображения? Модуль «съедает» у  отрицательных чисел знак и делает их положительными, именно поэтому «подвальные» точки занимают противоположные места в верхней полуплоскости.

Распишем функцию в кусочном виде:


Решив два простейших школьных неравенства , получаем:
, где  – любое целое число.