Дата: 26, 28, 29 января 2021г

Группа: к-11

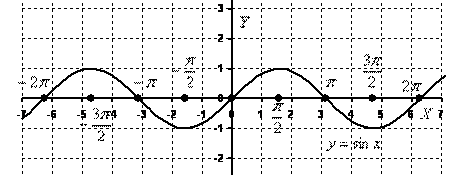
Предмет: Математика Тема:Графики тангенса и котангенса. Графики обратных тригонометрических функций. Преобразования графиков.

**Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

**Графики тригонометрических функций**

Повторим с прошлого занятия

Построим график функции http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image130_0000.gif



Данная линия называется *синусоидой*.

Напоминаю, что «пи» – это иррациональное число: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image134.gif.

Основные свойства функции http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image130_0001.gif:

Данная функция является **периодической** с периодом http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image137_0002.gif. Что это значит? Посмотрим на отрезок http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image139_0000.gif. Слева и справа от него бесконечно повторяется точно такой же кусок графика.

[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image063_0000.gif, то есть для любого значения «икс» существует значение синуса.

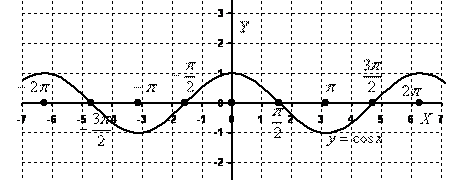
Область значений: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image142_0000.gif. Функция http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image130_0002.gif является **ограниченной**: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image145.gif, то есть, все «игреки» сидят строго в отрезке http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image147_0000.gif.   
Такого не бывает: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image149.gif или http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image151_0000.gif, точнее говоря, бывает, но указанные уравнения не имеют решения.

**Синус – это функция нечетная**, синусоида симметричная относительно начала координат, и справедлив следующий факт: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image153_0000.gif. Таким образом, если в вычислениях встретится, например, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image155.gif, то **минус терять здесь ни в коем случае нельзя!** Он выносится: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image157.gif

В практических вычислениях желательно (и даже обязательно) знать и помнить следующие значения синуса: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image163.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image165.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image167.gif.

**График косинуса**

Построим график функции http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image169.gif



**График косинуса – это та же самая синусоида, сдвинутая вдоль оси http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image021_0008.gif на http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image174.gif влево**  
(см. также Пример 8 урока [**о геометрических преобразованиях графиков**](http://www.mathprofi.ru/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii.html)).

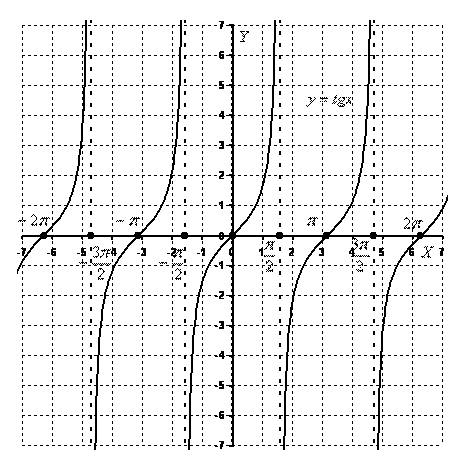
Поэтому почти все свойства синуса справедливы и для косинуса. За некоторым, но существенным исключением.

**Косинус – это функция четная**, ее график симметричен относительно оси  http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image023_0005.gif, и справедлив следующий факт: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image177.gif. То есть, минус перед аргументом косинуса можно безболезненно убирать (или наоборот, ставить). В отличие от синуса **в косинусе минус «бесследно пропадает»**.

Для решения практических задач нужно знать и помнить следующие значения косинуса: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image179.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image181.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image183.gif.

**Графики тангенса и котангенса**

Построим график функции http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image185.gif

  
Основные свойства функции http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image185_0000.gif:

Данная функция является **периодической** с периодом http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image190.gif. То есть, достаточно рассмотреть отрезок http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image192.gif, слева и справа от него ситуация будет бесконечно повторяться.

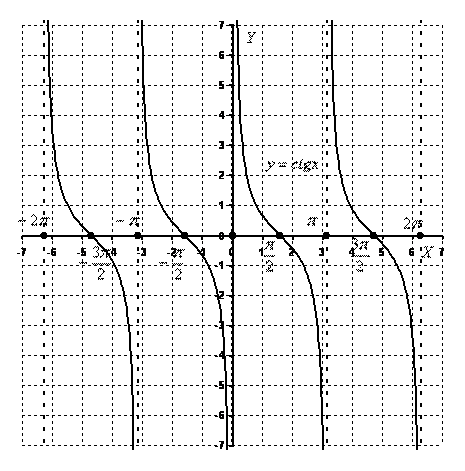
[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image194.gif – все действительные числа, кроме …  http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image196.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image198.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image200.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image202.gif… и т. д. или коротко: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image204.gif, где http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image206.gif – любое целое число. Множество целых чисел (… -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …) в высшей математике обозначают жирной буквой **Z**.

Область значений: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image208.gif. Функция http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image185_0001.gif **не ограничена**. В этом легко убедиться и аналитически:  
http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image210.gif – если мы приближаемся по оси http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image021_0009.gif к значению http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image212.gif **справа**, то ветка тангенса уходит на минус бесконечность, бесконечно близко приближаясь к своей асимптоте http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image214.gif.  
http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image216.gif – если мы приближаемся по оси http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image021_0010.gif к значению http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image218.gif **слева**, то «игреки» шагают вверх на плюс бесконечность, а ветка тангенса бесконечно близко приближается к асимптоте http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image200_0000.gif.

**Тангенс – функция нечетная**, как и в случае с синусом, минус из-под тангенса не теряется, а выносится: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image221.gif.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения тангенса: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image223.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image225.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image227.gif, а также те точки, в которых тангенса не существует (см. график).

График котангенса – это почти тот же самый тангенс, функции связаны тригонометрическим соотношением http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image999.gif. Вот его график:

  
Свойства попробуйте сформулировать самостоятельно, они практически такие же, как и у тангенса.

**Графики обратных тригонометрических функций**

Построим график арксинуса http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image233.gif

  
Перечислим основные свойства функции http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image233_0000.gif:

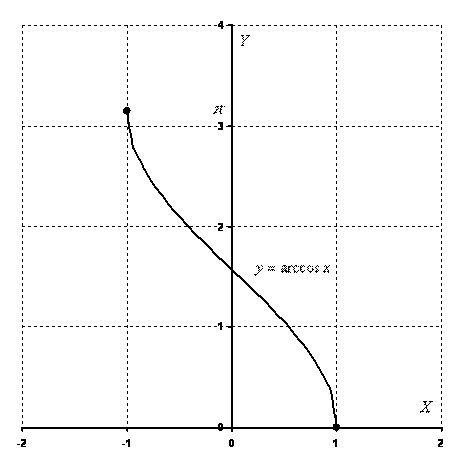
[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image238.gif, не существует значений вроде http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image240.gif или http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image242.gif

Область значений: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image244.gif, то есть,  функция http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image233_0001.gif **ограничена**.

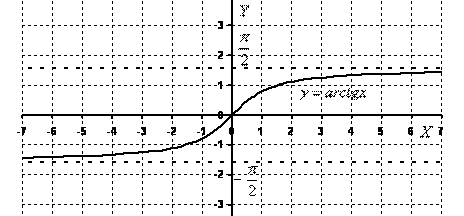
**Арксинус – функция нечетная**, здесь минус опять же выносится: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image246.gif.

В практических вычислениях полезно помнить следующие значения арксинуса: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image248.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image250.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image252.gif. Другие распространенные значения арксинуса (а также других «арков») можно найти с помощью [**таблицы значений обратных тригонометрических функций**](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf).

Построим график арккосинуса http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image258.gif

  
Очень похоже на арксинус, свойства функции сформулируйте самостоятельно. Остановлюсь на единственном моменте. В данной статье очень много разговоров шло о четности  и нечетности функций, и, возможно, у некоторых сложилось впечатление, что функция обязательно должна быть четной или нечетной. В общем случае, это, конечно, не так. Чаще всего, функция, которая вам встретится на практике – «никакая». В частности, **арккосинус не является четной или нечетной функцией**, он как раз «никакой».

Построим график арктангенса http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image262.gif



Всего лишь перевернутая ветка тангенса.   
Перечислим основные свойства функции http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image262_0000.gif:

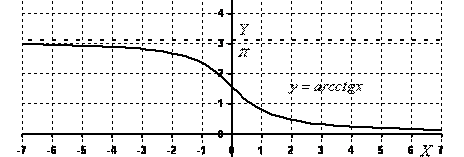
[**Область определения**](http://www.mathprofi.ru/oblast_opredeleniya.html): http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image063_0001.gif

Область значений: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image244_0000.gif, то есть,  функция http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image262_0001.gif **ограничена**.  
У рассматриваемой функции есть две асимптоты: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image267.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image269.gif.

**Арктангенс – функция нечетная**: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image271.gif.

Самые «популярные» значения арктангенса, которые встречаются на практике, следующие: http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image273.gif, http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image275.gif.

К графику арккотангенса http://www.mathprofi.ru/f/grafiki_i_svoistva_funkcij_clip_image277.gif приходится обращаться значительно реже, но, тем не менее, вот его чертеж:



Свойства арккотангенса вы вполне сможете сформулировать самостоятельно. Отмечу,  что арккотангенс, как и арккосинус, не является четной или нечетной функцией.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГРАФИКОВ.

## ****Сжатие (растяжение) графика к (от) оси ординат.**** ****Симметричное отображение графика относительно оси**** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025.gif

Первая группа действий связана с умножением АРГУМЕНТА функции на число. Для удобства я разобью правило на несколько пунктов:

### ****Сжатие графика функции к оси ординат****

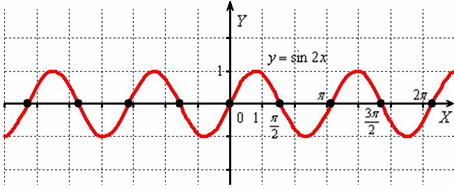
Это случай когда АРГУМЕНТ функции умножен на число, бОльшее единицы.

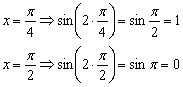
**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image029.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0000.gif **сжать к оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0000.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image031.gif раз.

Пример 1

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0000.gif.

Сначала изобразим график синуса, его период равен http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034.gif:  
  
К слову, чертить графики тригонометрических функций вручную – занятие кропотливое, поскольку http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image038.gif и т.д., то есть на стандартной клетчатой бумаге аккуратным нужно быть вплоть до миллиметра, даже до полумиллиметра. Впрочем, многие с этим уже столкнулись.

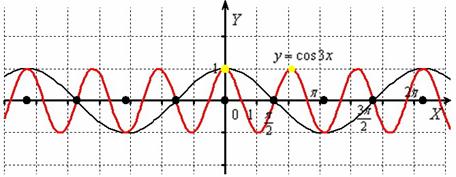
Теперь поиграем на бесконечно длинном баяне. Мысленно возьмём синусоиду в руки и сожмём её **к оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0001.gif в 2 раза:  
  
То есть, график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0001.gif получается путём сжатия графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042.gif к оси ординат в два раза. Логично, что период итоговой функции тоже уполовинился: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image044.gif

В целях самоконтроля можно взять 2-3 значения «икс» и устно либо на черновике выполнить подстановку:  
  
Смотрим на чертёж, и видим, что это действительно так.

**Аналогичную блиц-проверку полезно осуществлять в любом другом примере!** Более того, она лучше поможет усвоить суть того или иного преобразования.

Пример 2

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image048.gif

«Чёрная гармошка» http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050.gif сжимается **к оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0002.gif в 3 раза:  
  
Итоговый график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image048_0000.gif проведён красным цветом.  
Исходный период http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0000.gif косинуса закономерно уменьшается в три раза: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image056.gif (отграничен жёлтыми точками).

### ****Растяжение графика функции от оси ординат****

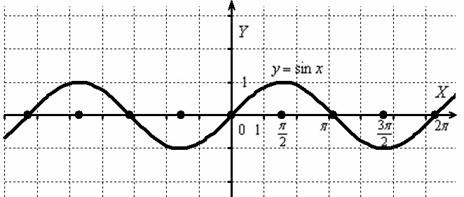
Это противоположное действие, теперь баян не сжимается, а растягивается.  
Случай имеет место, когда АРГУМЕНТ функции умножается на число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image058.gif.

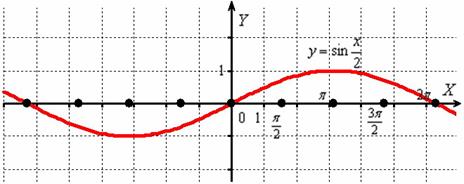
**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image058_0000.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0001.gif **растянуть от оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0003.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image062.gif раз.

Продолжим мучить синус:

Пример 3

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image064.gif

Берём в руки нашу «бесконечную гармошку»:  


И растягиваем её **от оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0004.gif в 2 раза:  


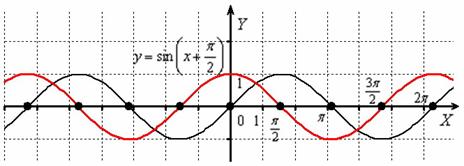
То есть, график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image064_0000.gif получается путём **растяжения** графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0000.gif **от оси ординат** в два раза. Период итоговой функции увеличивается в 2 раза: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image069.gif, он толком даже не вместился на данный чертёж.

Операции сжатия/растяжения графиков, разумеется, выполнимы не только для тригонометрических функций:

**Сдвиг графика влево/вправо вдоль оси абсцисс**

Пример 4

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image139.gif

График синуса http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0001.gif (чёрный цвет) сдвинем вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0003.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142.gif **влево**:  
  
Внимательно присмотримся к полученному красному графику http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image146.gif…. Это в точности график косинуса http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050_0000.gif! По сути, мы получили геометрическую иллюстрацию [формулы приведения](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf) http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image149.gif, и перед вами, пожалуй, самая «знаменитая» формула, связывающая данные тригонометрические функции.  График  функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image050_0001.gif получается путём сдвига синусоиды http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image042_0002.gif вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0004.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142_0000.gif единиц влево (о чём уже говорилось на уроке [Графики и свойства элементарных функций](http://www.mathprofi.ru/grafiki_i_svoistva_funkcij.html)). Аналогично можно убедиться в справедливости любой другой [формулы приведения](http://www.mathprofi.ru/trigonometricheskie_tablicy.pdf).

Рассмотрим композиционное правило, когда аргумент представляет собой линейную функцию: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image151.gif, при этом параметр «ка» **не равен** нулю или единице, параметр «бэ» – **не равен** нулю. Как построить график такой функции? Из школьного курса мы знаем, что умножение имеет приоритет перед сложением, поэтому, казалось бы, сначала график сжимаем/растягиваем/отображаем в зависимости от значения http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image031_0001.gif, а потом сдвигаем на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image112_0002.gif единиц. Но здесь есть подводный камень, и корректный алгоритм таков:

Аргумент функции необходимо представить в виде http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image155.gif и последовательно выполнить следующие преобразования:

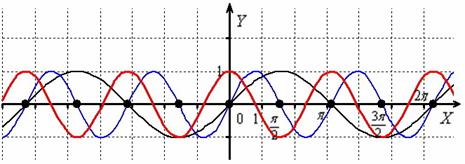
1) График функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0007.gif сжимаем (или растягиваем) к оси (от оси) ординат:http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0003.gif (если http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image159.gif, то график дополнительно следует отобразить симметрично относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0008.gif).

2) График полученной функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image027_0004.gif сдвигаем влево (или вправо) вдоль оси  абсцисс **на** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image163.gif**(!!!) единиц**, в результате чего будет построен искомый график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image165.gif.

Пример 5

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image167.gif

Представим функцию в виде http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image169.gif и выполним следующие преобразования: синусоиду http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image171.gif (чёрный цвет):

1) сожмём **к оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0009.gif в два раза:http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0002.gif (синий цвет);  
2) сдвинем вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0005.gif **на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image175.gif (!!!) влево**: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image167_0000.gif (красный цвет):  
  
Пример вроде бы несложный, а пролететь с параллельным переносом легче лёгкого. График сдвигается на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image175_0000.gif, а вовсе не на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image142_0001.gif.

**Растяжение (сжатие) графика ВДОЛЬ оси ординат.  
Симметричное отображение графика относительно оси абсцисс**

Структура второй части статьи будет очень похожа.

1) Если ФУНКЦИЯ http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0008.gif умножается на число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image204.gif, то происходит **растяжение её графика вдоль оси ординат**.

**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image204_0000.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0009.gif **растянуть вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0013.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image209.gif раз.

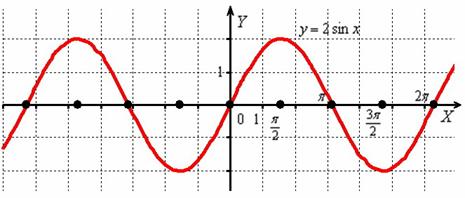
2) Если ФУНКЦИЯ умножается на число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image211.gif, то происходит **сжатие её графика вдоль оси ординат**.

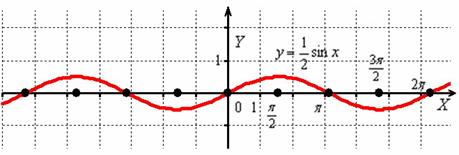
**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image206_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image211_0000.gif, нужно график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0010.gif **сжать вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0014.gif в http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image215.gif  раз.

Догадайтесь, какую функцию я буду снова пытать =)

Пример 6

Построить графики функций http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image217.gif.

Берём синусоиду за макушку/пятки:  
  
И **вытягиваем** её **вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0015.gif  в 2 раза:  
  
Период функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image221.gif не изменился и составляет http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0001.gif, а вот значения (все, кроме нулевых) увеличились *по модулю* в два раза, что логично – ведь функция умножается на 2, и область её значений удваивается: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image224.gif.

Теперь **сожмём** синусоиду **вдоль оси** http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0016.gif  в 2 раза:  
  
Аналогично, период http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image034_0002.gif не изменился, но область значений функции «сплющилась» в два раза: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image228.gif.

Нет, у меня нет какого-то пристрастного отношения к синусоиде, просто я хотел продемонстрировать, чем отличаются графики функций http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image230.gif (Примеры №№1,3) от только что построенных собратьев http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image217_0000.gif. Постарайтесь ещё раз проанализировать и качественнее понять эти элементарные случаи.  Даже минимальные знания о преобразованиях графиков окажут вам неоценимую помощь в ходе решения других задач высшей математики!

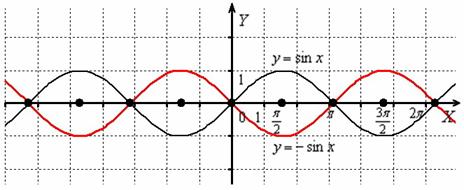
И, конечно же, классический пример растяжения/сжатия параболы:

Если ФУНКЦИЯ меняет знакна противоположный, то её **график отображается симметрично относительно оси абсцисс**.

**Правило**: чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image251.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0011.gif отобразить симметрично относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0007.gif.

Пример 7

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image254.gif

Отобразим синусоиду симметрично относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image109_0008.gif:  


**Сдвиг графика вверх/вниз вдоль оси ординат**

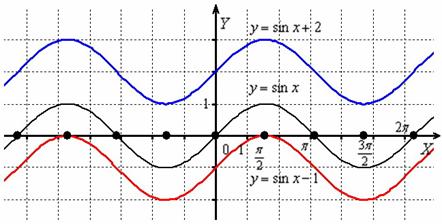
Настала пора дать передышку ногам и сесть в лифт.

Если к ФУНКЦИИ  добавляется константа, то происходит сдвиг (параллельный перенос) её графика вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0002.gif. Рассмотрим функцию http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0002.gif и положительное число http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0001.gif:

**Правила**:   
1) чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image008_0000.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0003.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0003.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0002.gif единиц **вверх**;  
2) чтобы построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image012_0003.gif, нужно график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0004.gif сдвинуть **ВДОЛЬ** оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0004.gif на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0003.gif единиц **вниз**.

Пример 8

Построить графики функций http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image015.gif.

В комментариях, думаю, нет особой необходимости:  


Комбинационное построение графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image019_0000.gif в общем случае осуществляется очевидным образом:

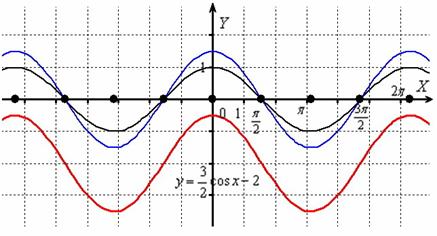
1) График функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0005.gif растягиваем (сжимаем) вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0005.gif. Если множитель отрицателен, дополнительно осуществляем симметричное отображение относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0012.gif.

2) Полученный на первом шаге график http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image025_0018.gif сдвигаем вверх или вниз в соответствии со значением константы http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image006_0004.gif.

Пример 9

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image028.gif

График косинуса http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image030.gif (чёрный цвет):

1) Растягиваем вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0006.gif в 1,5  раза: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image033.gif (синий цвет);  
2) Сдвигаем вдоль оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0007.gif на 2 единицы вниз: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image028_0000.gif:  


## ****Графики функций с модулем****

Для качественного усвоения материала необходимо понимать, что такое модуль. Краткую информацию о нём можно найти на странице [Математические формулы и таблицы](http://www.mathprofi.ru/matematicheskie_formuly.html) в справочном материале Горячие формулы школьного курса математики.

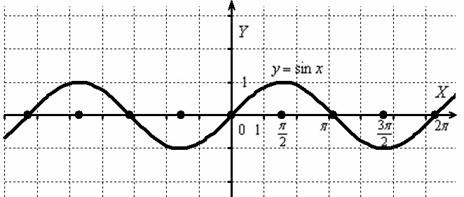
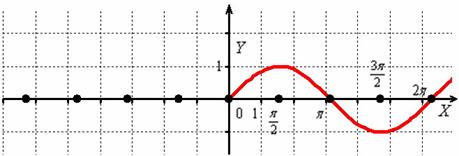
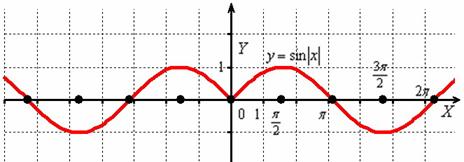
Применение модуля тоже представляет собой геометрическое преобразование графика. Не буду создавать сверхподробный мануал, отмечу только те моменты, которые, с моей точки зрения, реально пригодятся для решения других задач по вышке.

Сначала посмотрим, что происходит, когда модуль применяется к АРГУМЕНТУ функции.

**Правило**: график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image153.gif получается из графика функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0006.gif следующим образом: при http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image156.gif график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image004_0007.gif **сохраняется**, а при http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image159_0000.gif «сохранённая часть» **отображается симметрично** относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0016.gif.

Пример 10

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image162.gif

И снова вечная картина:  
  
Согласно правилу, при http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image156_0000.gif график сохраняется:  
  
И сохранившаяся часть отображается симметрично относительно оси  http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image002_0017.gif в левую полуплоскость:  


Действительно, функция http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image162_0000.gif – чётная, и её график симметричен относительно оси ординат. Поясню детальнее смысл симметрии. Посмотрим на два противоположных значения аргумента, например, на http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image171_0000.gif и http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image173.gif. А какая разница? Модуль всё равно уничтожит знак «минус»: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image175_0001.gif, то есть значения функции будут располагаться на одной высоте.

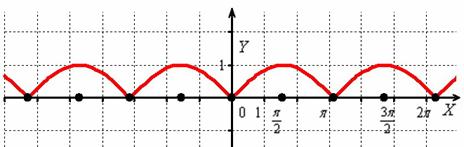
Функцию от модуля можно расписать в так называемом **кусочном виде** по следующему правилу: http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image177.gif. В данном случае:  
http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image179.gif

То есть, правая волна графика http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image162_0001.gif задаётся функцией http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image181.gif, а левая волна – функцией http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image183.gif

Пример 11

Построить график функции http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image238_0000.gif.

Изобразим сами знаете что =)  


И снова – то, что находиться в верхней полуплоскости – оставим в покое, а содержимое подвала – отобразим симметрично относительно оси http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image023_0022.gif:  


Кстати, понятен ли вам неформальный смысл такого симметричного отображения? Модуль «съедает» у  отрицательных чисел знак и делает их положительными, именно поэтому «подвальные» точки занимают противоположные места в верхней полуплоскости.

Распишем функцию в кусочном виде:  
http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image243_0000.gif

Решив два простейших школьных неравенства http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image245_0000.gif, получаем:  
http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image247_0000.gif, где http://www.mathprofi.ru/i/kak_postroit_grafik_funkcii_s_pomoshyu_preobrazovanii_clip_image249_0000.gif – любое целое число.