Дата: 10, 11 марта 2021

Группа: м-12

Предмет: Математика Тема: «Производная.»

**Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

Перепиши в тетрадь:

1)Урок 1. Определение производной. Физический смысл производной

2) Презентацию "Механический смысл производной"

**Урок 1. Определение производной. Физический смысл производной**

##### Конспект урока

**Алгебра и начала математического анализа, 11 класс**

**Урок №10. Определение производной. Физический смысл производной.**

**Перечень вопросов, рассматриваемых в теме**

1) Определение производной;

2) Физический смысл производной;

2) Приращение функции;

3) Скорость материальной точки в заданный момент времени по данному закону движения.

**Глоссарий по теме**

Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют **приращением функции**.

**Определение.** Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/ba0ca863-1301-4dbb-b8bd-bf84783a8d43.png

**Основная литература:**

Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2014.

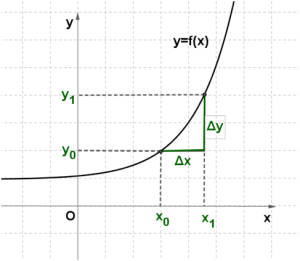
**Дополнительная литература:**

Шабунин М.И., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. Дидактические материалы Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2017.

**Теоретический материал для самостоятельного изучения**

Изучая поведение функции y=f(x) около конкретной точки x0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют **приращением аргумента** (при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют **приращением функции**.



Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита "дельта"; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, x1-x0=Δx, значит, x1=x0+Δx.

f(x1)-f(x0)=Δy, значит,

**Δy=f(x0+Δx)-f(x0). (1)**

Нельзя истолковывать термин "приращение" как "прирост".

**Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля**

**Пример 1.**

Найдем приращение Δx и Δf в точке x0, если f(x)= x2, x0=2 и х=1,9

Решение:

Δx= x1−x0=1,9-2=-0,1

Δf= f(1,9) –f(2)=1,92-22=-0,39

Ответ: Δx=-0,1; Δf =-0,39

**Пример 2.**

Найдем приращение Δx и Δf в точке x0, если f(x)= x2, x0=2 и х=2,1

Решение:

Δx= x1−x0=2,1-2=0,1

Δf= f(1,9) –f(2)=2,12-22=0,41

Ответ: Δx=0,1; Δf =0,41

**Пример 3.**

Найдем приращение Δf функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/9eb6609e-a32a-43b9-b835-1b298f3fc29e.pngв точке x0,если приращение аргумента равно x0.

**Решение:**

по формуле (1) находим:

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8e58e60e-39bd-401f-a84d-9876402d470a.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/50acb4a3-8339-4a2f-9783-08b443edabb3.png.

С помощью введенных обозначений приращений удобно также выражать среднюю скорость движения за промежуток времени [t0; t0+∆t]. Если точка движется по прямой и известна ее координата x(t), то

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8f40c2e4-1cc1-4b53-b0d4-84eebc4f1bdb.png

Эта формула верна и для ∆t<0 (для промежутка [t0+∆t; t0]).

Аналогично выражение https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/900fc1f0-d8ef-4bd4-b98e-2fb224a42a77.pngназывают средней скорость изменения функции на промежутке с концами х0 и х0+∆х.

**Определение.** Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/6068eca4-9b07-44a7-b838-037e87a394ab.png

Обозначение: y’ или f’(x)

Если функция f(x) имеет производную в точке х, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

**Схема вычисления производной функции**

1. Найти приращение функции на отрезке [x; x+Δx]:

∆y=y(x+∆x)-y(x)

1. Разделить приращение функции на приращение аргумента:

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/5372d0a9-28f1-4a14-a292-b500aa4715cf.png

1. Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/ab01b46e-dc32-437c-9140-aba669097efc.png

**Пример 4.**

Вычислить производную функции y=x2

Решение: Используем схему вычисления производной по действиям:

1. ∆y=y(x+∆x)-y(x)= (х+∆х)²-х²= х²+2х·∆х+ ∆х²-х²= 2х·∆х+ ∆х²
2. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/c38f8711-2bb5-43d7-97c1-dc8913504c34.png
3. https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/74932419-a259-4bbe-9836-bf574548cae4.png

Ответ: y’=2x.

Физический смысл производной: если положение точки при её движении задаётся функцией пути S(t), где t – время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t: v(t)=S’(t).

Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени.

**Пример 5.**

Точка движется по закону s(t)=1-2t. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени от t=0,8 до t=1.

Решение:

найдем ∆t= 1-0,8=0,2

S(0,8)= 1-2·0,8= -0,6=S(t)

S(1)= 1-2·1= -1=S(t+∆t)

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/0e221375-1c73-4a13-923e-7319161ce0df.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/015c9d61-e941-44e6-bebd-3c697a6d781e.png.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости

**Теорема 1.** Для того, чтобы функция f(x) была дифференцируема в точке x0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную. **Следствие.** Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

**Замечание.** Дифференциалом dx независимой переменной будем считать приращение Δx, т.е. dx ≡ Δx.



Алгебра и начала математического анализа. 11 класс

Урок 1. Определение производной. Физический смысл производной

Конспект урока

Перечень вопросов, рассматриваемых в теме

1) Определение производной;

2) Физический смысл производной;

2) Приращение функции;

3) Скорость материальной точки в заданный момент времени по данному закону движения.

Глоссарий по теме

Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют приращением аргумента (при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют приращением функции.

Определение. Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/ba0ca863-1301-4dbb-b8bd-bf84783a8d43.png

Основная литература:

Колягин Ю.М., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. и др., под ред. Жижченко А.Б. Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2014.

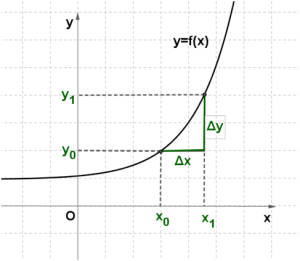
Дополнительная литература:

Шабунин М.И., Ткачева М.В., Федорова Н.Е. Дидактические материалы Алгебра и начала математического анализа (базовый и профильный уровни) 11 кл. – М.: Просвещение, 2017.

Теоретический материал для самостоятельного изучения

Изучая поведение функции y=f(x) около конкретной точки x0, важно знать, как меняется значение функции при изменении значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

Пусть функция y=f(x) определена в точках x0 и x1. Разность x1−x0 называют приращением аргумента (при переходе от точки x0 к точке x1), а разность f(x1)-f(x0) называют приращением функции.



Приращение аргумента обозначают Δx (читают: дельта икс; Δ — прописная буква греческого алфавита "дельта"; соответствующая строчная буква пишется так: δ). Приращение функции обозначают Δy или Δf.

Итак, x1-x0=Δx, значит, x1=x0+Δx.

f(x1)-f(x0)=Δy, значит,

Δy=f(x0+Δx)-f(x0). (1)

Нельзя истолковывать термин "приращение" как "прирост".

Примеры и разбор решения заданий тренировочного модуля

Пример 1.

Найдем приращение Δx и Δf в точке x0, если f(x)= x2, x0=2 и х=1,9

Решение:

Δx= x1−x0=1,9-2=-0,1

Δf= f(1,9) –f(2)=1,92-22=-0,39

Ответ: Δx=-0,1; Δf =-0,39

Пример 2.

Найдем приращение Δx и Δf в точке x0, если f(x)= x2, x0=2 и х=2,1

Решение:

Δx= x1−x0=2,1-2=0,1

Δf= f(1,9) –f(2)=2,12-22=0,41

Ответ: Δx=0,1; Δf =0,41

Пример 3.

Найдем приращение Δf функции https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/9eb6609e-a32a-43b9-b835-1b298f3fc29e.pngв точке x0,если приращение аргумента равно x0.

Решение:

по формуле (1) находим:

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8e58e60e-39bd-401f-a84d-9876402d470a.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/50acb4a3-8339-4a2f-9783-08b443edabb3.png.

С помощью введенных обозначений приращений удобно также выражать среднюю скорость движения за промежуток времени [t0; t0+∆t]. Если точка движется по прямой и известна ее координата x(t), то

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/8f40c2e4-1cc1-4b53-b0d4-84eebc4f1bdb.png

Эта формула верна и для ∆t<0 (для промежутка [t0+∆t; t0]).

Аналогично выражение https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/900fc1f0-d8ef-4bd4-b98e-2fb224a42a77.pngназывают средней скорость изменения функции на промежутке с концами х0 и х0+∆х.

Определение. Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/6068eca4-9b07-44a7-b838-037e87a394ab.png

Обозначение: y’ или f’(x)

Если функция f(x) имеет производную в точке х, то эта функция называется дифференцируемой в этой точке. Если функция f(x) имеет производную в каждой точке некоторого промежутка, то эта функция дифференцируема на этом промежутке. Операция нахождения производной называется дифференцированием.

Схема вычисления производной функции

Найти приращение функции на отрезке [x; x+Δx]:

∆y=y(x+∆x)-y(x)

Разделить приращение функции на приращение аргумента:

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/5372d0a9-28f1-4a14-a292-b500aa4715cf.png

Найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/ab01b46e-dc32-437c-9140-aba669097efc.png

Пример 4.

Вычислить производную функции y=x 2

Решение: Используем схему вычисления производной по действиям:

∆y=y(x+∆x)-y(x)= (х+∆х)²-х²= х²+2х·∆х+ ∆х²-х²= 2х·∆х+ ∆х²

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/c38f8711-2bb5-43d7-97c1-dc8913504c34.png

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/74932419-a259-4bbe-9836-bf574548cae4.png

Ответ: y’=2x.

Физический смысл производной: если положение точки при её движении задаётся функцией пути S(t), где t – время движения, то производная функции S есть мгновенная скорость движения в момент времени t: v(t)=S’(t).

Таким образом, скорость – есть производная от пути по времени.

Пример 5.

Точка движется по закону s(t)=1-2t. Найдите среднюю скорость движения за промежуток времени от t=0,8 до t=1.

Решение:

найдем ∆t= 1-0,8=0,2

S(0,8)= 1-2·0,8= -0,6=S(t)

S(1)= 1-2·1= -1=S(t+∆t)

https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/0e221375-1c73-4a13-923e-7319161ce0df.png.

Ответ: https://resh.edu.ru/uploads/lesson_extract/4923/20190730114358/OEBPS/objects/c_matan_11_10_1/015c9d61-e941-44e6-bebd-3c697a6d781e.png.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости

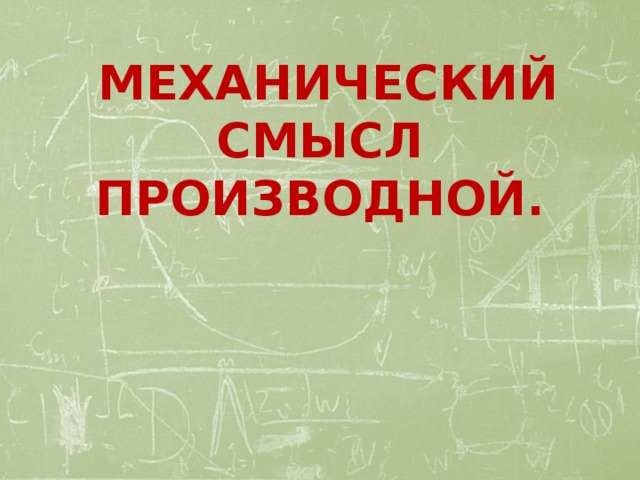
Теорема 1. Для того, чтобы функция f(x) была дифференцируема в точке x0, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке она имела конечную производную. Следствие. Функция, дифференцируемая в точке, непрерывна в этой точке.

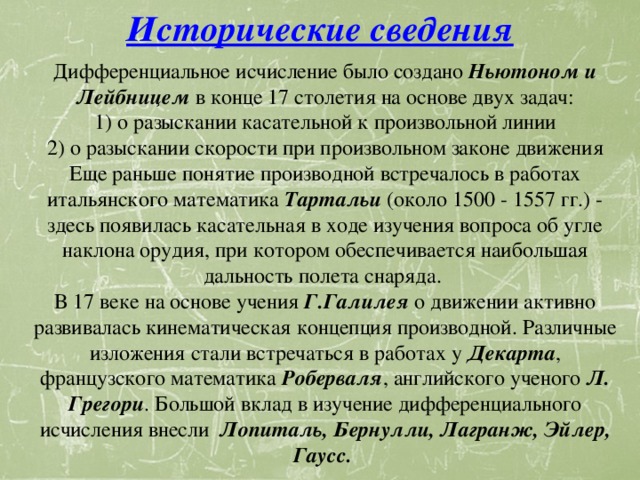
Замечание. Дифференциалом dx независимой переменной будем считать приращение Δx, т.е. dx ≡ Δx.

**ПРЕЗЕНТАЦИЯ "ПРОИЗВОДНЫЕ"**

В презентации приводится историческая справка о появлении понятия "производная".Дается определение производной на примере физической задачи о свободном падении. Решаются задачи о нахождении производных.

**Просмотр содержимого документа   
«ПРЕЗЕНТАЦИЯ "ПРОИЗВОДНЫЕ"»**





**Механический смысл производной.**



***Исторические сведения***

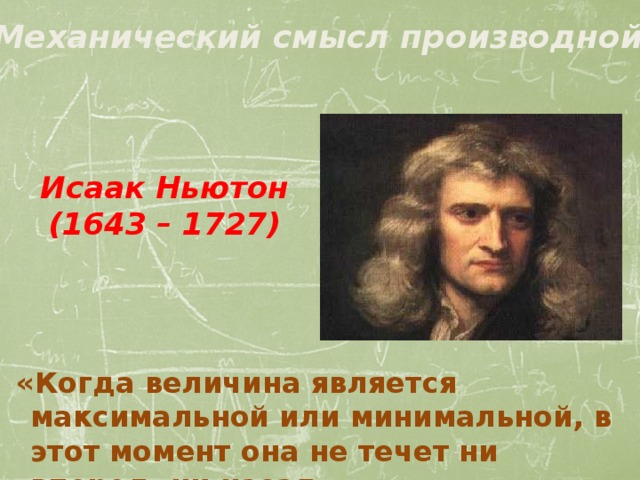
Дифференциальное исчисление было создано ***Ньютоном и Лейбницем*** в конце 17 столетия на основе двух задач:

1) о разыскании касательной к произвольной линии

2) о разыскании скорости при произвольном законе движения

Еще раньше понятие производной встречалось в работах итальянского математика ***Тартальи*** (около 1500 - 1557 гг.) - здесь появилась касательная в ходе изучения вопроса об угле наклона орудия, при котором обеспечивается наибольшая дальность полета снаряда.

В 17 веке на основе учения ***Г.Галилея*** о движении активно развивалась кинематическая концепция производной. Различные изложения стали встречаться в работах у ***Декарта*** , французского математика ***Роберваля*** , английского ученого ***Л. Грегори*** . Большой вклад в изучение дифференциального исчисления внесли ***Лопиталь, Бернулли, Лагранж, Эйлер, Гаусс.***



***И. Ньютон***

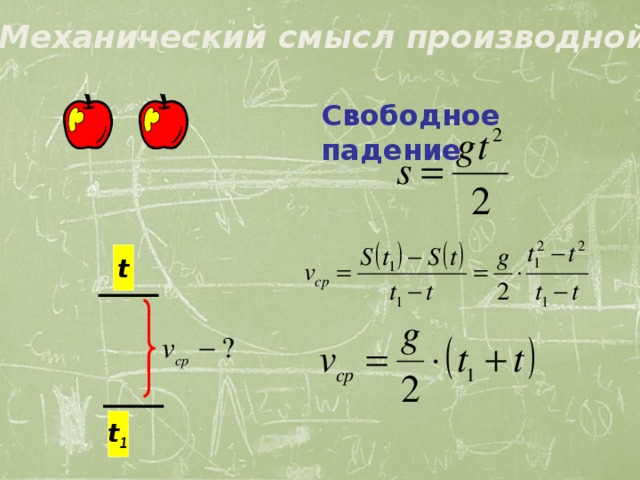
***Р. Декарт***

***Г. Лейбниц***

***Г.Галилей***

***Ж. Лагранж***

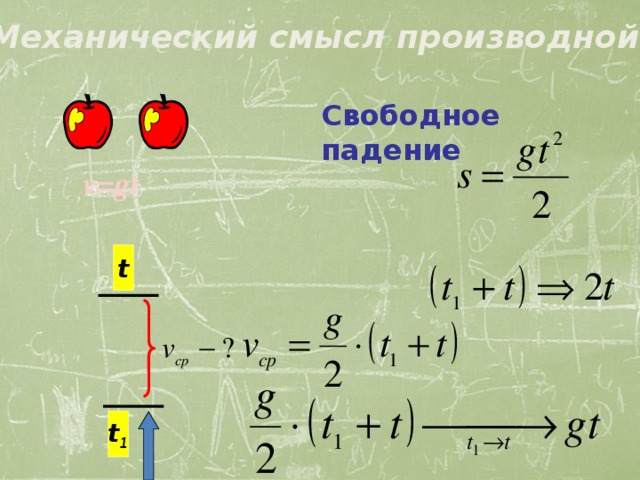
***Л. Эйлер***



***Механический смысл производной.***

***Исаак Ньютон (1643 – 1727)***

**«Когда величина является максимальной или минимальной, в этот момент она не течет ни вперед, ни назад.»**

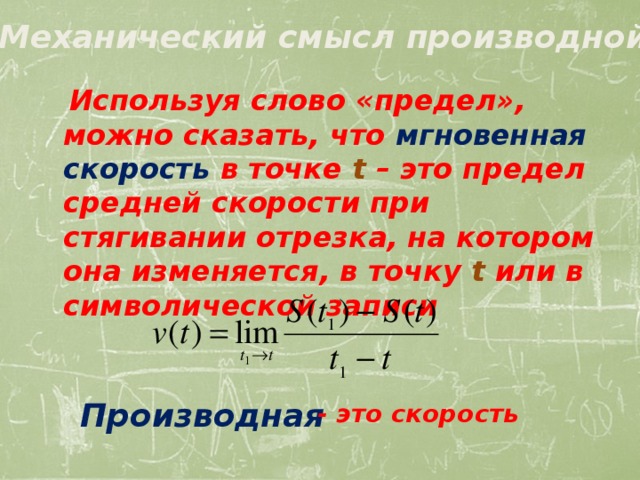


***Механический смысл производной.***

**Свободное падение**

***t***

***t*** ***1***



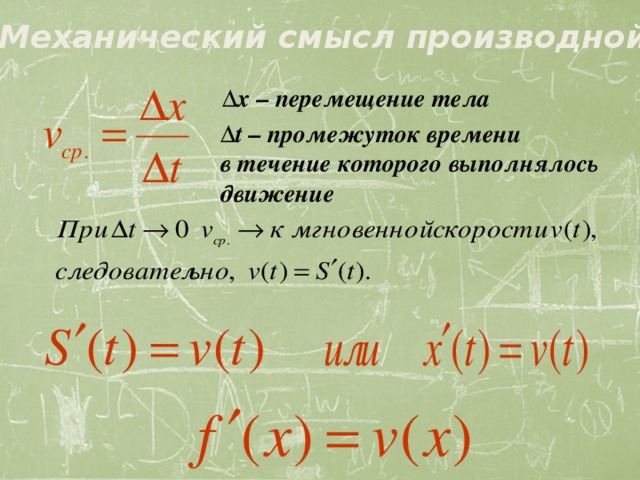
***Механический смысл производной.***

**Свободное падение**

***v=gt***

***t***

***t*** ***1***

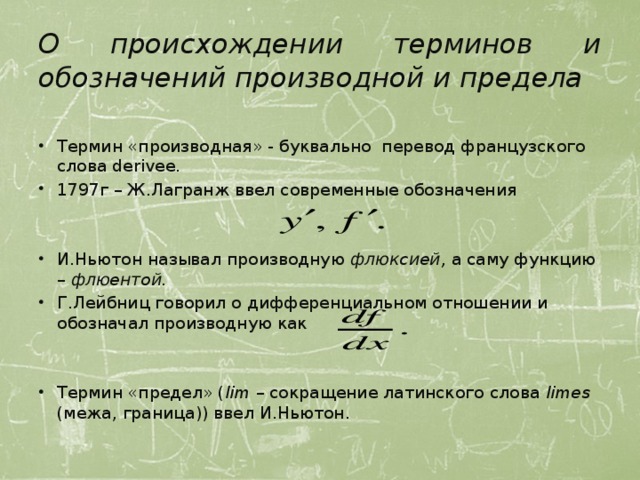


***Механический смысл производной.***

***Используя слово «предел», можно сказать, что*** ***мгновенная скорость*** ***в точке*** ***t*** ***– это предел средней скорости при стягивании отрезка, на котором она изменяется, в точку*** ***t*** ***или в символической записи***

***Производная***

***- это скорость***



***Механический смысл производной.***

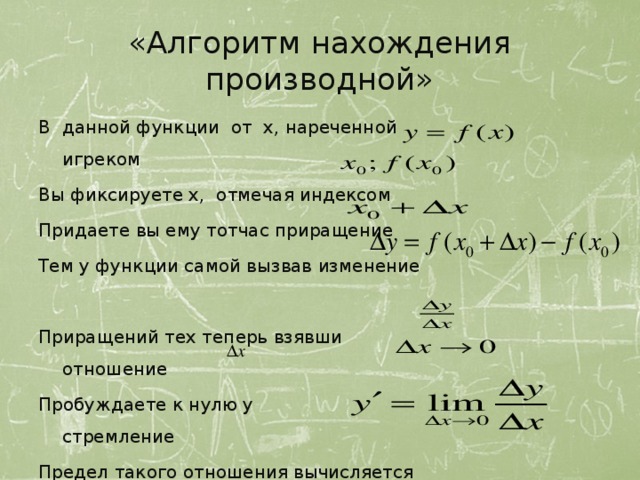
***Δх – перемещение тела***

***Δt – промежуток времени***

***в течение которого выполнялось***

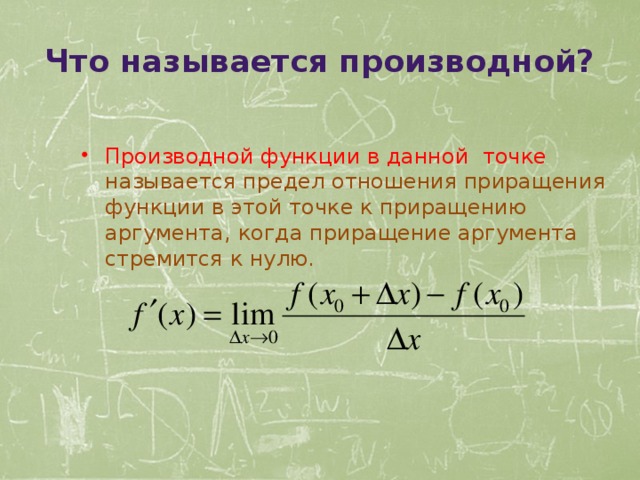
***движение***

.



*О происхождении терминов и обозначений производной и предела*

* Термин «производная» - буквально перевод французского слова derivee.
* 1797г – Ж.Лагранж ввел современные обозначения
* И.Ньютон называл производную *флюксией,* а саму функцию – *флюентой.*
* Г.Лейбниц говорил о дифференциальном отношении и обозначал производную как
* Термин «предел» ( *lim* – сокращение латинского слова *limes* (межа, граница)) ввел И.Ньютон.



«Алгоритм нахождения производной»

В данной функции от x, нареченной игреком

Вы фиксируете x, отмечая индексом

Придаете вы ему тотчас приращение

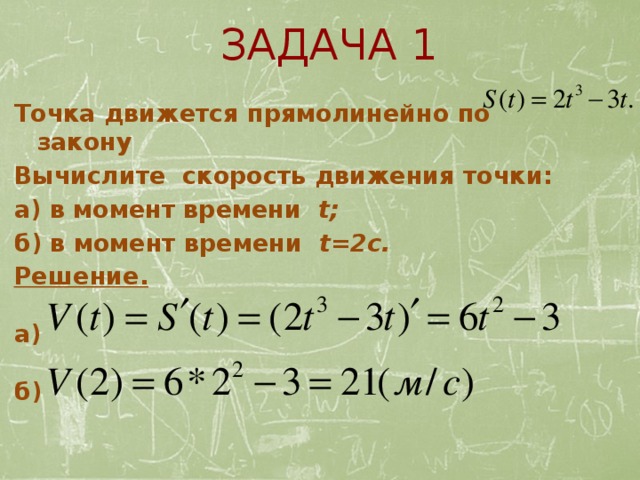
Тем у функции самой вызвав изменение

Приращений тех теперь взявши отношение

Пробуждаете к нулю у стремление

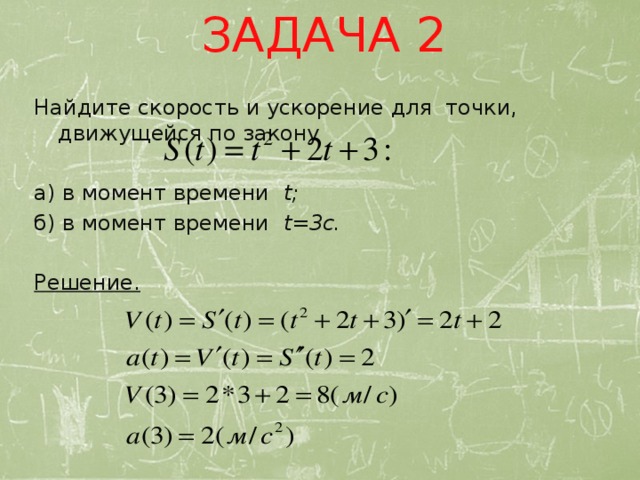
Предел такого отношения вычисляется

Он производную в науке называется



**Что называется производной?**

* Производной функции в данной точке называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.



**Блиц-опрос**

* ***Что называется производной функции в точке?***

***Ответ*** *:* **производной функции у = f(x) в точке называется предел отношения приращения функции в точке х** **0** **к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.**

* ***В чем заключается геометрический смысл производной?***

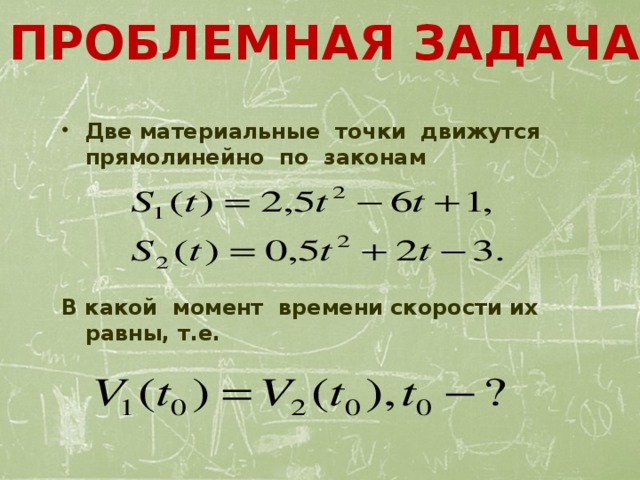
***Ответ:*** **значение производной f '(x) при данном значении аргумента x равно тангенсу угла, образованного с положительным направлением оси Ox касательной к графику функции f(x) в точке** *M(x, f(x)).*

**k = tg** **α** **= f '(x** **0** **).**

* ***В чем заключается механический смысл производной?***

***Ответ:*** **производная функции y = f(x) в точке x** **0** **- это скорость изменения функции f (х) в точке x** **0**

**x'(t). =** **ν** **(t)**



задача 1

**Точка движется прямолинейно по закону**

**Вычислите скорость движения точки:**

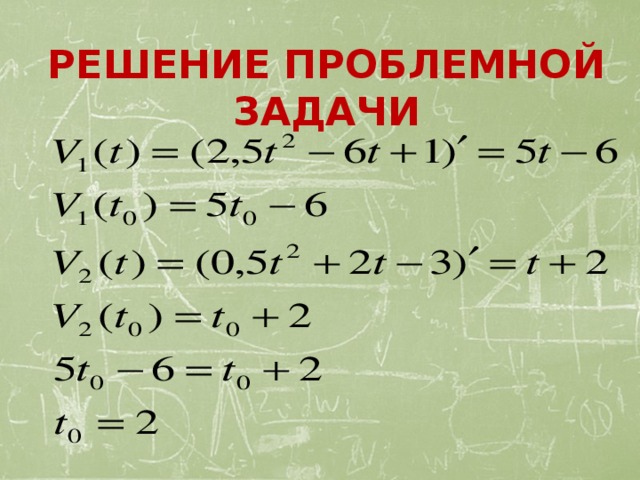
**а) в момент времени** ***t;***

**б) в момент времени** ***t=2с.***

**Решение.**

**а)**

**б)**



задача 2

Найдите скорость и ускорение для точки, движущейся по закону

а) в момент времени *t;*

б) в момент времени *t=3с.*

Решение.

