Дата: 01,02,03 ноября 2021

Группа: м-11

Предмет: Математика

Тема: **Иррациональные уравнения**

 **Преподаватель:** Леханова Елена Анатольевна

Участвуйте в олимпиаде по математике "Осенний фестиваль знаний 2021" (compedu.ru или на др.)

1. Спишите теорию и 8 решенных уравнений.

2. Решите самостоятельно 15 уравнений.

**Иррациональные уравнения**

 *Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.*

 При решении иррациональных уравнений применяют метод возведения в степень обеих частей уравнения и метод введения новой переменной (замены переменной).

 Следует учесть, что при возведении обеих частей уравнения в чётную степень возможно появление посторонних корней. В этом случае обязательна проверка найденных корней подстановкой в исходное уравнение. Необходимо иметь в виду, что избавиться от иррациональности вида n$\sqrt{b}$

можно возвести в степень n,так как (n$\sqrt{b})$n=b. Этим приёмом нельзя избавиться от иррациональности в выражении  n$\sqrt{b}$+с.

*I. Уравнения, содержащие квадратные корни.*

*Для решения таких уравнений надо:*

*1) возвести обе части уравнения в квадрат;*

*2) упростить полученное уравнение;*

*3)при необходимости ещё раз возвести в квадрат и т. д. до тех пор, пока не получится уравнение, не содержащее корни.*

*4) решить это уравнение;*

*5) сделать проверку или определить область допустимых значений для неизвестного числа; отобрать соответствующие корни (решения)*

*6) записать ответ.*

**Пример 1.** Решить уравнение $\sqrt{х^{2}+5х+1}$ =2х-1

*Решение.*

В левой части уравнения находится только квадратный корень. Возьмём обе части уравнения в квадрат:

($\sqrt{х^{2}+5х+1}$)2=(2х-1)2

х2+5х+1= 4х2-4х+1

3х2-9х=0

Х2-3х=0

х(х-3)=0

х1=0; х2=3

Проверка:

 х1=0:$\sqrt{0^{2}+5·0+1}$=1; 2·0-1=-1; 1≠-1 =>х1=0 не является корнем уравнения (посторонний корень).

х2=3: $\sqrt{3^{2}+5·3+1}=\sqrt{25}$ =5; 2·3-1=5; 5=5.

***Ответ***: *х*=3.

**Пример 2.** Решить уравнение $\sqrt{2х-3}=\sqrt{х-2}$

*Решение.*

$\left(\sqrt{2х-3 } \right)$2$=(\sqrt{х-2}$ )2

 2х-3=х-2

 2х-х=3-2

 Х=1

 Проверка:

Х=1: $\sqrt{2·1-3}=\sqrt{-1}$ не существует => х=1-посторонний корень. Поэтому данное уравнение не имеет решений.

***Ответ***: решений нет.

**Пример 3.** Решить уравнение  $\sqrt{10+х+х^{2}}$ -х=4х-4

*Решение.*

 Оставим в левой части только слагаемое с квадратным корнем

$\sqrt{10+х+х^{2}}$=х+3х-4

 $\sqrt{10+х+х^{2}}$=4*х*-4

$(\sqrt{10+х+х^{2}} )$2=(4х-4)2

10+х+х2=16х2-32+16

15х2-33х+6=0

Получили квадратное уравнение, решим его.

 D= $\sqrt{b^{2}-4ac}$

D=332- 4·15·6=1089-360=729

Х12$=\frac{-b\pm \sqrt{D}}{2a}$

Х12$=\frac{33\pm 27}{30}$х1=2; х2=0,2

Проверка:

х1=2: $\sqrt{10+2+2^{2}}$ -2 =$\sqrt{16}$ - 2= 4- 2=2; 3·2-4=2; 2=2

х2=0,2: $\sqrt{10+0,2+0,2^{2}}$=$\sqrt{10,24}$ -0,2=3,2-0,2=3; 3·0,2-4=0,6-4= -3,4;

3≠-3,4 => [[1]](#footnote-2)х2=-3,4- посторонний корень.

***Ответ***: *х*=2.

**Пример 4.** Решить уравнение $\sqrt{х+6}·\sqrt{13-3х}=х+3$

*Решение.*

 Возьмём обе части уравнения в квадрат:

($\sqrt{х+6}·\sqrt{13-3х}$)2=(х+3)2

 ($\sqrt{\left(х+6\right)(13-3х)}$ )2 =(х+3)2

(х+6)(13-3х) = (х+3)2

13х-3х2+78-18х=х2+6х+9

4х2+11х-69=0

х1=3; х2= $-\frac{23}{4}$

Проверка:

х1=3: $\sqrt{3+6}$ ·$\sqrt{13-9}$=3·2=6 3+3=6; 6=6.

х2= $-\frac{23}{4}:\sqrt{-\frac{23}{4}+6}$ ·$\sqrt{13-3∙(-\frac{23}{4}})$= -$\frac{11}{4}$

$\frac{11}{4}\ne -\frac{11}{4} =>$ х2= $-\frac{23}{4}$ - посторонний корень

***Ответ***: *х*=3.

**Пример 5.** Решить уравнение $\sqrt{4х+8}$ -$\sqrt{3х-2}$ =2

  *Решение.*

 Здесь нельзя избавиться от иррациональности сразу. Возведение обеих частей равенства в квадрат приводит к новому иррациональному уравнению.

($\sqrt{4х+8}$ -$\sqrt{3х-2}$)2 =22

4х+8-2$\sqrt{4х+8}$·$\sqrt{3х-2}$+3х-2=4

7х=2=2$\sqrt{4х+8}$·$\sqrt{3х-2}$

Возводим ещё раз в квадрат:

(7х+2)2=(2$\sqrt{4х+8}$·$\sqrt{3х-2}$ )2

49Х2+28Х+4=4·(4Х+8)(3Х-2)

49Х2+28Х+4=4·(12х2-8х+24х-16)

х2-36х+68=0

х1=34; х2=2

Проверка:

х1=34: $(\sqrt{4∙34+8}$ -$\sqrt{3∙34-2})$ =$\sqrt{144}-\sqrt{100}=12-10=2; 2=2$

х2=2: $(\sqrt{4∙2+8}$ -$\sqrt{3∙2-2})$ =$\sqrt{16}-\sqrt{4}=4-2=2; 2=2$ .

***Ответ***: *х*=34; х2=2.

**Пример 6.** Решить уравнение $\sqrt[3]{2х+7}$=$\sqrt[3]{3(х-1)}$.

  *Решение.*

($\sqrt[3]{2х+7}$ )3 =($\sqrt[3]{3(х-1)}$ )3

2х+7=3х-3

2х-3х=-3-7

-х=-10

х=10

Заметим, что в данном случае проверка необязательна, так как использовался метод возведения обеих частей в нечётную степень, при котором посторонние корни не появляются.

***Ответ***: *х*=10.

**Пример7.** Решить уравнение 4$\sqrt{25х^{2}-144}$ =х

  *Решение.*

(4$\sqrt{25х^{2}-144}$ )4 = (х)4

25х2-144=х4

х4-25х2+144=0 - биквадратное уравнение.

Пусть х2=у , тогда у2-25у+144=0

Находим у1=16; у2=9. Поэтому: х2=16 => х1,2=±4 и

 х2=9=> х3,4=±3

Проверка: х1=4: 4$\sqrt{25·16-144}$ =$\sqrt[4]{256}$ =4; 4=4.

х2=-4: 4$\sqrt{25·16-144}$ =$\sqrt[4]{256}$ =4; 4≠-4=> х2=-4 - посторонний корень.

х3=3: 4$\sqrt{25·9-144}$ =$\sqrt[4]{81}$ =3; 3=3.

х4=-3 4$\sqrt{25·9-144}$ =$\sqrt[4]{81}$ =3; 3≠-3- посторонний корень.

***Ответ***: *х1=4;х2=3.*

**Пример8.** Решить уравнение $\sqrt{2х+1}$ +$\sqrt[4]{2х+1}$ =12.

  *Решение.*

Пусть $\sqrt[4]{2х+1}$ = у, тогда $\sqrt{2х+1}$ = ($\sqrt[4]{2х+1}$ )2=у2 .

Поэтому *у2+у-12=0; у1=3; у2=-4*

1)$\sqrt[4]{2х+1}$ =3

 2х+1=34

 2х+1=81

 2х=80

 х=40.

2) $\sqrt[4]{2х+1}$ =-4. Это уравнение не имеет корней, так как

$\sqrt[4]{2х+1}$ ≥0, а число (-4)˂0.

 Проверка: *х=40:*$ \sqrt{2·40+1}$ +$\sqrt[4]{2·40+1}$=$\sqrt{81}$ +$\sqrt[4]{81}$ =9+3=12; 12=12.

***Ответ***: *х=40*

**Пример9.** Решить уравнение
$$\sqrt[3]{\frac{х+13}{х-13}}+\sqrt[3]{\frac{х-13}{х+13}}=\frac{10}{3}$$

*Решение.*

 Область определения уравнения: х≠±13.

Пусть $\sqrt[3]{\frac{х+13}{х-13}}$ = *у,* тогда
$\sqrt[3]{\frac{х-13}{х+13}}=\frac{1}{у}$
у≠0.

Поэтому $у+\frac{1}{у}$=$\frac{10}{3}$

 3у2-10у+3=0; у1=3; *у2=*$\frac{1}{3}$ . Отсюда:

1)$\sqrt[3]{\frac{х+13}{х-13}}=3;$ $\frac{х+13}{х-13}=3$3; $\frac{х+13}{х-13}=27;$

*х+*13=27·(х-13);

х+13=27х-351

26х*=*364

х1=14;

2)$\sqrt[3]{\frac{х+13}{х-13}}=\frac{1}{3};$ $\frac{х+13}{х-13}=\frac{1}{27};$

27·(х+13)=х-13

27х+351=х-13

26х=-364

х2=-14.

***Ответ***: *х1=14; х2=14.·*

**Упражнения для самостоятельной работы**

Решить уравнения:

1. $\sqrt{х^{2}-11}$=-х-1;

2.$ \sqrt{2-х^{2}}$-$\sqrt{х}$ =0;

3.$ \sqrt{2х^{2}+1 }$-х=1;

4.$ \sqrt{х+3}$ -$\sqrt{2х-1}$ =х+1;

5.$ \sqrt{6-5х-2х^{2} }$-4=х;

6.$ \sqrt{3х+1}$ +$\sqrt{2х-1}$ =3;

7.$ \sqrt{х+1}$ +$\sqrt{4х+13}$ =$\sqrt{3х+12}$

8. х2=$\sqrt{19х^{2}-34}$

9.$ \sqrt{х} $+ $\sqrt[4]{х}$ =20;

10. 2$\sqrt[3]{1-х}$ =5·$\sqrt[6]{1-х }$ -18=0;

11.$ \sqrt{\frac{х}{х+1}}$ +2· $\sqrt{\frac{х+1}{х}}$ =3;

12.$ \sqrt{16-\sqrt{х+1}}$ =4;

13.$ \sqrt{х-3} $ - $\sqrt{х+3} $=2-$ \sqrt{10}$;

14.$ \sqrt{х+13}$ =12-$ \sqrt[4]{х+13;}$

15. $\sqrt{2х+7}$ - 2 = х.

***Ответы:***

1.х=-6; 2.х=1;

3. х1=2, х2=0; 4. х=1;

5. х1=-1, х2=$-\frac{10}{3}$ ; 6.х=1;

7. х=-1; 8.х1,2=$\pm \sqrt{17}$, х3,4=$\pm \sqrt{2}$;

9. *х=256; 10. х=-63;*

11. $х=-\frac{4}{3}$; 12. *х=-1;*

*13. х=7 ; 14. х=68;*

*15. х=1*$-\frac{10}{3}$

1. [↑](#footnote-ref-2)